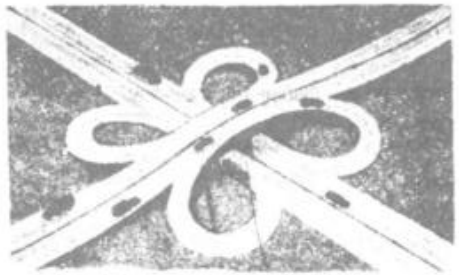
agustín anfossi

flores meyer

álgebra

mejorada por M. A. Flores Meyer

VIGESIMOSEGUNDA EDICION



Respete el derecho de autor.
No fotocopie esta obra.
CeMPro

Teléfono: 55-47-17-80
Fax: 55-41-11-89
e-mail: ediciones@editorialprogreso.com
e-mail: progvtas@webtelmex.net.mx

Derechos reservados:
© 1930 Marco Antonio Flores Meyer y
Agustín Anfossi
© 1930 EDITORIAL PROGRESO, S. A. DE C. V.
Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera
Delegación Cuauhtémoc, C. P. 06400
México, D. F.

Álgebra
alumno

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro núm. 232

ISBN: 968-436-213-7

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra por cualquier medio: electrónico o mecánico, incluso el fotocopiado, sin el conocimiento previo y por escrito del editor.

Progreso y el logotipo son marcas registradas por
Editorial Progreso, S. A. de C. V.

Impreso en México
Printed in Mexico

1ª edición: 1930
16ª reimpresión: 2004

Se terminó la impresión de esta obra en abril del 2004
en los talleres de Editorial Progreso, S. A. de C. V.
Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera
Delegación Cuauhtémoc, C. P. 06400, México, D. F.
Tiro: 2 600 ejemplares más sobrantes para reposición.

Dada la aceptación que maestros y alumnos han dispensado al ALGEBRA DE A. ANFOSSI, el Mtro. M. A. Flores Meyer ha tenido a bien proseguir la edición, de esta obra.

Se ha añadido en el Apéndice un capítulo dedicado a las Fracciones Parciales.

Otro capítulo sobre Lógica Matemática y Conjuntos pone remate a esta obra.

INDICE

PRIMERA PARTE

OPERACIONES FUNDAMENTALES

CAPITULO Págs.

I *Lenguaje algebraico* 17

II *Ecuaciones de primer grado*

1 Definiciones 25
2 Ecuaciones de primer grado 28
3 Ecuaciones literales 33

III *Operaciones con números algebraicos*

1 Números 36
2 Suma de números 38
3 Resta de números 40
4 Multiplicación de números 43
5 División de números 49

IV *Suma y resta*

1 Suma algebraica 52
2 Resta algebraica 54

V *Multiplicación*

1 Producto de potencias y de monomios 58
2 Producto de polinomios 60

VI *Productos notables* 65

VII *División*

1 División de potencias y de monomios 75
2 División de polinomios 80
3 Divisibilidad entre $x \pm a$ 84
4 Cocientes notables 87

VIII *Descomposición en factores*

1 Procedimientos sencillos de descomposición 93
2 Descomposición de un binomio de la forma $x^n \pm y^n$ 95
3 Descomposición por agrupación y por evaluación 98
4 Descomposición de un trinomio de la forma $x^2 + mx + n$, o $ax^2 + mx + n$ 101

IX *Fracciones*

1 Preliminares 106
2 Simplificación de quebrados 108
3 Reducción de quebrados a un común denominador 110
4 Reducción de quebrados a forma mixta y viceversa 115
5 Suma y resta de quebrados 119
6 Multiplicación y división de quebrados 119
7 Fracciones complejas 123
8 Interpretación de las formas $\frac{m}{0}, \frac{m}{\infty}, \frac{0}{m}, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 124

X *Razones y proporciones*

1 Definiciones y principios 130
2 Aplicaciones de las proporciones 137

SEGUNDA PARTE

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

I *Ecuaciones de primer grado con una incógnita*

1 Principios relativos a su resolución 145
2 Ecuaciones que contienen quebrados 149

II *Problemas de primer grado con una incógnita*

1 Resolución de problemas 153
2 Discusión de problemas 159

III *Gráficas*

1 Definiciones. Clases. Aplicaciones 168
2 Representación cartesiana 172

IV *Ecuaciones simultáneas de primer grado con dos o más incógnitas*

1 Definiciones. Resolución gráfica 179
2 Resolución por eliminación 181
3 Resolución de ecuaciones literales simultáneas 189
4 Resolución de ecuaciones simultáneas con incógnitas en los denominadores 190
5 Resolución de ecuaciones simultáneas con más de dos incógnitas 194
6 Diferentes clases de sistemas 201

V *Desigualdades de primer grado con una incógnita*

1 Definiciones y propiedades 213
2 Resolución de las inecuaciones 217

TERCERA PARTE

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

I *Potencias y raíces*

1 Definiciones y propiedades 221
2 Raíz cuadrada 224
3 Raíz cúbica y raíz emésima 229
4 Diversas clases de números 231
5 Exponentes fraccionarios 233

II *Propiedades de los radicales* 237

III *Operaciones con radicales*

1 Suma y resta de radicales 244
2 Multiplicación de radicales 245
3 División de radicales 248
4 Racionalización 249
5 Potencia y raíz de un radical 253
6 Ecuaciones irracionales 254

IV *Ecuaciones de segundo grado*

1 Resolución de la ecuación incompleta 259
2 Resolución de la ecuación completa 262
3 Casos particulares 271
4 Ecuaciones irracionales 275
5 Naturaleza de las raíces de las cuadráticas ... 277

V *Propiedades de las raíces en las cuadráticas*

1 Relación entre las raíces y los coeficientes ... 279
2 Aplicaciones de las propiedades de las raíces 281

2 Aplicaciones de las propiedades de las raíces 281

VI *Ecuaciones y sistemas de ecuaciones de forma cuadrática*

1 Resolución de ecuaciones de forma cuadrática 287
2 Resolución de sistemas de primero y segundo grados, o de sistemas de segundo grado, reducibles a forma cuadrática 289
3 Problemas cuya resolución da lugar a una cuadrática o a un sistema de primero y segundo grados 296

VII *Trinomio de segundo grado. Su variación y representación. Inecuaciones de segundo grado* 302

VIII *Teoría del binomio*

1 Desarrollo de las potencias de un binomio ... 312
2 Fórmula general del binomio 314
3 Generalización de la fórmula del binomio 317
4 Triángulo de Pascal 319

CUARTA PARTE

PROGRESIONES Y LOGARITMOS

I *Progresiones aritméticas*

1 Definiciones y fórmulas 321
2 Aplicación de las fórmulas 323

II *Progresiones geométricas*

1 Definiciones y fórmulas 330
2 Aplicación de las fórmulas 332
3 Interpolación. Límite de una progresión decreciente 335

III *Logaritmos*

1 Preliminares 340
2 Logaritmos decimales 343
3 Tablas de logaritmos y su manejo 347
4 Tablas de antilogaritmos y su manejo 354
5 Propiedades de los logaritmos 355
6 Aplicaciones de los logaritmos 358
7 Cologaritmo. Uso y ventajas 362
8 Ecuaciones exponenciales 364

IV *Interés compuesto y anualidades*

1 Interés compuesto 366
2 Anualidades de imposición 369
3 Anualidades de amortización 371

APENDICE

I *División sintética* 374

II *Determinantes*

1 Resolución de un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas 376
2 Determinantes de segundo orden 378
3 Resolución de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas 381
4 Determinantes de tercer orden 383
5 Propiedades de los determinantes de tercer orden 385
6 Resolución de un sistema de tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas 389
7 Determinantes de cuarto orden 393

III *Raíz cuadrada y raíz cúbica*

1 Raíz cuadrada de un binomio de la forma $x + y\sqrt{z}$ 396
2 Raíz cúbica de un polinomio 397

IV *Números complejos*

1 Definiciones y propiedades 401
2 Operaciones con números complejos 404

V *Nociones de análisis combinatorio*

1 Permutaciones. Ordenaciones. Combinaciones 408
2 Aplicación de la fórmula del binomio 412

VI *Resolución de la ecuación de tercer grado* .. 416

VII *Fracciones Parciales* 421

VIII *Lógica Matemática y Conjuntos* 431

RESEÑA HISTORICA DEL ALGEBRA

El Algebra, tal como se conoce hoy, con los numerosos símbolos que en ella se usan y los diferentes signos con que se indican las operaciones, es relativamente moderna, pues comienza en el siglo XVI y alcanza su completo desarrollo en el XVII.

Paccioli, en el siglo XV, escribía *"Trouame .1.n°. che gioto al suo qdrat° facia .15."* para representar la ecuación $x + x^2 = 15$.

A mediados del siglo XVI Gosselin indicará la ecuación $14x - x^2 = 144$ del siguiente modo: 14 *L M* 1 *Q aequalia* 144.

Hacia 1585 la ecuación $3x^2 - 6x + 12 = 76$, el matemático Ramus la escribía $3q$ —— 6 *l* —+— 12 *aequatus sit* 76.

Descartes en 1637 usaba $xx^{\infty} bx - \frac{dy}{a} + ax$ para la ecuación $x^2 = bx - \frac{dy}{a} + ax$.

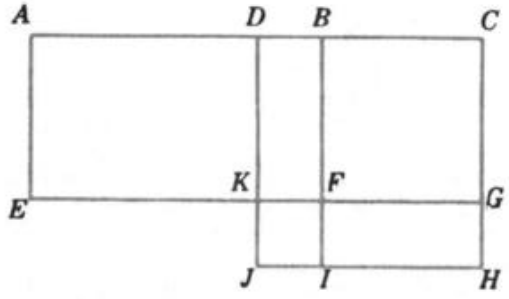
Desde los tiempos de Newton (1642-1727) la ecuación $x^3 - ax^2 + bx = 0$ se escribía ya de ese mismo modo.

Si en vez de atender a la clase de simbolismos usados se tiene en cuenta la resolución de ciertos tipos de problemas, los orígenes del álgebra remontan a los babilonios y egipcios.

Desde los tiempos del rey Hammurabi (2000 A. J. C.) los babilonios resolvían problemas de segundo grado. Como ejemplo, sea encontrar la longitud de dos segmentos (2 números) *AB* y *BC*, dada su suma *s* y el área *p* del rectángulo por ellos formado. La construcción de la figura que aquí se indica y la suposición "falsa" de que el valor buscado es la mitad de *s*, lleva a la solución:

$$AB = AD + BD = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - p}$$

$$BC = AD - BD = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - p}$$



$CH = \frac{s}{2}$

$DC = \frac{s}{2}$

$AC = s$

$ABFE = p$

Por un papiro encontrado en Egipto, escrito cerca del año 1850 a. de J. C., y otro, posterior a él de unos 200 años, denominado papiro de *Ahmés*, del nombre del autor, se tiene certeza de que cultivaban esta ciencia y resolvían ya sistemas de ecuaciones. Una de las tres ecuaciones de primer grado del papiro de *Ahmés* se ve en la reproducción siguiente,

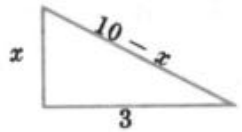
$$x\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + 1\right) = 37.$$

que se interpreta así: Hau "sus $\frac{2}{3}$, su $\frac{1}{2}$, su $\frac{1}{7}$, su todo", hacen 37.

La palabra *hau* significa montón, y es el nombre más antiguo que se conoce para designar la incógnita.

En época muy posterior, en el siglo III de nuestra era, un gran matemático griego, *Diofanto de Alejandría*, escribió una obra, que intituló Aritmética. En ella invade el terreno que hoy se considera propio del Algebra, enuncia la regla de los signos de la multiplicación, hace uso de abreviaturas y de un signo para indicar la resta; resuelve, además, ecuaciones cuadráticas y una cúbica, si bien esta última sólo en un caso especial.

Los chinos indudablemente tuvieron conocimientos que corresponden al álgebra como lo prueba un problema de un Comentario (siglo III A. J. C.) a la *Aritmética en Nueve Secciones:* Un bambú de 10 pies de alto se rompió por el viento y la punta tocó el suelo a tres pies del pie de la planta. Calcúlese la altura a que se rompió. La resolución exige el conocimiento del teorema de Pitágoras y de las ecuaciones de primer grado.



Los hindúes hicieron progresar un tanto esta ciencia. Los árabes, por su parte, que debieron inspirarse en los hindúes y en los griegos, en *Diofanto* especialmente, le dieron nuevo impulso. Con estos dos pueblos comienzan a darse reglas para la resolución de ecuaciones de primero y de segundo grados, con una incógnita.

El matemático y astrónomo *Muhammed-ibn-Musa Al-Khowarizmi*, que vivía en Bagdad en el siglo IX, publicó cerca del año 825, un libro que llamó AL-JABR W'AL-MUKABALAH. La primera palabra quiere decir compensación o restauración (de la igualdad de los dos miembros de una ecuación) y la segunda equivale a reducción (de los términos semejantes). De las dos, la primera ha perdurado hasta hoy y ha sido universalmente adoptada; la segunda fue perdiendo terreno paulatinamente hasta casi desaparecer por completo ya desde el siglo XIV.

Un gran matemático italiano, *Leonardo de Pisa*, muy conocido también con el nombre de *Fibonacci*, contribuyó mucho a la introducción y divulgación de esta ciencia en Europa; la enriqueció con nuevos adelantos y hasta comenzó a representar la incógnita con una letra.

Otros algebristas italianos, del siglo XVI, enriquecieron la ciencia algébrica con notables adelantos: *Nicolás Tartaglia* encuentra, en 1534, la manera de resolver las ecuaciones cúbicas, y en 1545 *Jerónimo Cardano* publica, en su ARS MAGNA —nombre con que designaba el Algebra—, la fórmula de resolución de dichas ecuaciones, e incluye en el mismo libro el procedimiento hallado por un discípulo suyo, *Ludovico Ferrari*, para resolver las ecuaciones de cuarto grado.

En el mismo siglo un gran matemático francés, *Francisco Viète*, a quien saludan algunos como fundador del Algebra moderna, hace progresar notablemente la ciencia algébrica por los nuevos métodos de resolución de las ecuaciones la teoría relativa a éstas, así como por la introducción de un nuevo simbolismo, que si bien no es tan perfecto como el actual, sí representa notable adelanto y prepara el camino para otro más adecuado, el que hoy día es empleado en el mundo entero.

Matemáticos ingleses, franceses, alemanes y belgas enriquecieron esta ciencia con los signos que en la actualidad son de todos conocidos, perfeccionaron el simbolismo y completaron así lo que podría llamarse la estructura exterior del Algebra:

John Widmann (1489) idea los signos + y −;
Christoff Rudolff (1525) comienza a usar el signo radical $\sqrt{\ }$;
Robert Recorde (1557) introduce el signo =;
Albert Girard (1629) idea el paréntesis rectangular [ ];
William Oughtred (1631) usa el signo ×;
Thomas Harriot en el mismo año utiliza los signos de desigualdad > y <.

En su obra MIRIFICI LOGARITHMORUM, *John Napier* da cuenta de la invención de los Logaritmos, antes de que se usaran los

exponentes. Esto lo realizó a principios del siglo XVII. *Euler* consideró ya los logaritmos como exponentes de la base. *Briggs* llamó mantisa a la parte decimal de los logaritmos y calculó con 14 cifras los correspondientes a los números 1 a 20 000 y 90 000 a 100 000. El hueco de 20 000 a 90 000 fue cubierto por los cálculos de *Adrián Vlacq* (1600-1667). Otros procedimientos fueron inventados para calcular estos "maravillosos números" por *James Gregory, W. Brounker, Nicolás Mercator* y *Edmond Halley.*

Con *René Descartes* (1637) recibe el Algebra un nuevo impulso: él simplifica y completa la escritura simbólica adoptando la letra x para designar la incógnita, inicia la costumbre de escribir los exponentes enteros como se hace todavía ahora; enuncia la regla relativa a los signos de las raíces de una ecuación y da un nuevo procedimiento de resolución de ecuaciones bicuadráticas.

A su vez *John Wallis* (1655) con el símbolo del infinito, ∞, completa el número de los signos más usados, introduce los exponentes negativos y da mayor impulso al empleo de los exponentes fraccionarios, ya ideados (1360) por *Nicolás Oresme*, obispo de Lisieux. Pocos años después (1659) *Johann H. Rhan* comienza a hacer uso del signo $\div$ para indicar la división.

Por último, *Isaac Newton* (1676) generaliza la fórmula para desarrollar un binomio, haciendo extensivo el procedimiento al caso de exponentes negativos y fraccionarios. Perfecciona, además, el procedimiento de Viète para calcular las raíces inconmensurables de una ecuación, y el suyo será perfeccionado, a su vez, por *Pablo Ruffini* (1804) y por *William G. Horner* (1819).

Aunque estas líneas sólo tratan de reseñar la Historia del Algebra Elemental, no pueden considerarse como exhaustivas del tema. Muchos otros matemáticos aportaron fructuosos trabajos en este campo, entre ellos nombraremos a *Cauchy, Leibnitz, Cramer, Pascal, Shinsuke, Nicholson, Rheticus, Klaus, Ceulen, Metius, Stevin, Pérez de Moya, Díez, Gunter, Burgi, Cavalieri, Roberval,* etc.

PRIMERA PARTE

OPERACIONES FUNDAMENTALES

1

LENGUAJE ALGEBRAICO

1. Algebra. *El Algebra es una ciencia cuyo objeto es simplificar y generalizar las cuestiones relativas a los números.*

En Algebra, lo mismo que en Aritmética, se efectúan operaciones con los números, pero el modo de representarlos difiere en ambas ciencias. En Aritmética, sólo se hace uso de los signos comúnmente llamados arábigos 0, 1, 2, 3, etc., para escribir los números; mientras que en Algebra, para representarlos, se usan letras, como a, b, x, y, etc., las cuales se llaman *literales.*

2. Signos de operación. En Algebra, la *suma*, la *resta*, la *multiplicación* y la *división* se indican como en Aritmética, con los signos $+$ (más), $-$ (menos), $\times$ (por) y $:$ (entre); como $a + b$, $a - b$, $a \times b$, $a : b$.

3. Fórmula. Si el rectángulo $ABCD$ (fig. 1) tiene 5 cm de largo y 3 cm de ancho, se pueden formar en él 3 fajas de 5 cm de largo por 1 cm de ancho. Cada faja puede dividirse en 5 cuadritos de 1 cm de largo y 1 cm de ancho; cada cuadrito es pues 1 cm², y las 3 fajas juntas constan de $5 \times 3 = 15$ cm², que es el área del rectángulo.

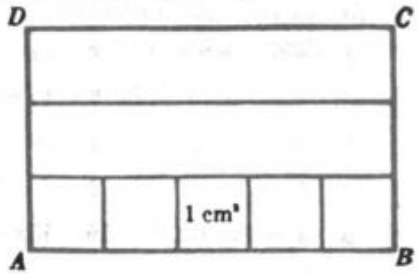


Fig. 1.

Este resultado se expresa diciendo: El área de un rectángulo es igual al producto de la base por la altura.

Esta expresión puede abreviarse así:

$$Area = base \times altura.$$

Dicha abreviación, resulta más corta, escribiendo sólo la primera letra de cada palabra suprimiendo el signo $\times$; y así

$$A = ba.$$

La expresión $A = ba$, se llama fórmula.

Toda fórmula es una regla expresada por medio de símbolos, e indica las operaciones que deben efectuarse con los números representados por las literales, para obtener ciertos resultados.

4. Transformación de fórmulas. **Por la Aritmética se sabe que, dado el producto de dos factores y uno de ellos, para calcular el otro, se divide el producto entre el factor conocido. Así, de la fórmula del área del rectángulo $A = ba$, se deduce:**

$$b = \frac{A}{a}, \quad \text{y} \quad a = \frac{A}{b}.$$

5. Maneras de escribir un producto. **El producto de dos factores literales a y b, puede escribirse de las maneras siguientes:**

$$a \times b, \quad a \,.\, b, \quad a \cdot b, \quad ab. \qquad (1)$$

Del mismo modo, el producto 5 por a se representa como sigue:

$$5 \times a, \quad 5 \,.\, a, \quad 5 \cdot a, \quad 5a.$$

6. Paréntesis. El *paréntesis* es signo de *agrupación*.

Si se quiere indicar que a $m + n$ se le debe sumar la diferencia $r - s$, se escribe

$(m + n) + (r - s)$.

Para indicar que se ha de restar $p - q$ de $m + n$, se escribe

$(m + n) - (p - q)$.

El producto de la suma $a + b$ por c se indica $(a + b) \times c$, o simplemente

$$(a + b)c;$$

asimismo el producto de $a + b$ por $c - d$ se escribe

$(a + b) \times (c - d)$,

o bien $(a + b)(c - d)$.

La división de la suma $a + b$ entre la diferencia $c - d$, o de la expresión $(a - b)c$ entre $e + f$. se representa, respectivamente, por

$(a + b) : (c = d)$, o $(a - b)c : (e + f)$.

7. Raya de quebrado. **La raya de quebrado que sirve para indicar la división de un número entre otro, suple, en muchos casos, el paréntesis.**

Así, $(a - h) : 4$ es igual a $\frac{a - h}{4}$,

y $(m + n) : (c - e)$ es igual a $\frac{m + n}{c - e}$.

8. Coeficiente. El área de un rectángulo de base b y altura a, es ba. El área de tres rectángulos iguales al anterior, es

$$ba + ba + ba = 3ba.$$

El volumen de un paralelepípedo rectángulo (fig. 2), en que las dimensiones de la base son b y a, y la altura c, es bac. El volumen de dos paralelepípedos iguales al anterior (fig. 3), es

$$bac + bac = 2bac.$$

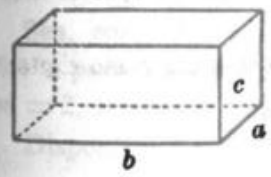


Fig. 2.

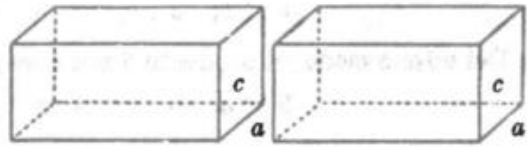


Fig. 3.

El duplo de a se escribe $2a$, el triple de b se escribe $3b$, el cuádruplo de $\frac{a}{3}$, $4\frac{a}{3}$, el quíntuplo de c, $5c$, etc.

Así se tiene:

$$2a = a + a;$$
$$3b = b + b + b;$$
$$4\tfrac{a}{3} = \tfrac{a}{3} + \tfrac{a}{3} + \tfrac{a}{3} + \tfrac{a}{3}.$$

$$5c = c + c + c + c + c;$$

$$nc = c + c + c \ldots . \ (n \text{ sumandos iguales a } c).$$

En las expresiones anteriores, 2, 3, 4, 5 y n se llaman *coeficientes*. Los cuatro primeros son numéricos y el último es literal.

Coeficiente es el número o la letra que indica cuántos sumandos iguales se toman.

9. Base. Exponente. Potencia. El producto de 5 por 5 es 5×5; el de 5 por 5 por 5 es $5 \times 5 \times 5$; el de a por a es $a \times a$; el de a por a por a es $a \times a \times a$, etc.

Convencionalmente, el producto de 5×5 se escribe 5^2; el de $5 \times 5 \times 5$ se escribe 5^3; y, análogamente. los productos $a \times a$ $a \times a \times a \times a \times a \times a \ldots$ (n factores iguales al número a), se escriben a^2, a^3, a^n.

5^2 se lee 5 al cuadrado, ó 5 elevado a la segunda potencia;

a^2 se lee a cuadrada, o a elevada a la segunda potencia;

a^3 se lee a cúbica, o a elevada a la tercera potencia;

y en general, a^n se lee a enésima, o a elevada a la enésima potencia.

En las expresiones 5^2, a^2, a^3, a^n, los números 5 y a se llaman *base*.

El numerito (o la letra) escrito arriba, a la derecha de la base, se llama exponente, e indica el número de factores iguales a la base que hay en el producto.

Resulta pues:

$$5^2 = 5 \times 5 = 25;$$
$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125;$$
$$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625;$$
$$5^n = 5 \times 5 \times 5 \ldots . \ (n \text{ factores iguales a } 5).$$

Potencia de un número es el producto (indicado o efectuado) de dos o más factores iguales a ese número.

10. Observaciones. - 1ª Nótese la diferencia entre potencia y exponente: en $625 = 5^4$, 625 es la cuarta potencia de 5, y 4 es el exponente de dicha potencia.

2ª El exponente 1 no se suele escribir. Si una literal no tiene ningún exponente escrito, se subentiende el exponente 1; así, a equivale a a^1.

11. Valor numérico. *Valor numérico* de una expresión algebraica es el valor que ésta adquiere, cuando se reemplaza en ella la literal o literales por ciertos números determinados, y se efectúan después las operaciones indicadas.

Así, con $a = 3$ y $b = 2$, el valor numérico de $a^3 - 2a^2b + 2b^2$ es:

$$3^3 - 2 \times 3^2 \times 2 + 2 \times 2^2 = 27 - 36 + 16 = 7.$$

12. Tabulación. Sucede, en ciertos casos, que se debe calcular el valor numérico de una expresión algebraica, correspondiente a varios valores de una o más literales; como, por ejemplo, calcular el valor numérico de la expresión $3x^2 - 2$, para los valores de x iguales, sucesivamente, a 1, 2, 3, 4 y 5.

En casos como éste, conviene disponer los cálculos según se ve en el siguiente cuadro:

Valores de x =	1	2	3	4	5
Valores de $3x^2$ =	3	12	27	48	75
Valores de $3x^2 - 2$ =	1	10	25	46	73

Sea, como otro ejemplo, calcular el valor de la expresión $3m^2n$ para los pares de valores: $m = 1$, $n = 0$; $m = 1$, $n = 1$; $m = 2$, $n = 4$; $m = 5$, $n = 2$; $m = 5$, $n = 3$.

Disponiendo los valores como en el cuadro anterior, se tiene:

Valores de m =	1	1	2	5	5
Valores de n =	0	1	4	2	3
Valores de $3m^2n$ =	0	3	48	150	225

Esta presentación en una tabla o cuadro de valores, se llama *tabulación*.

13. **Función.** Si se observa el primer ejemplo del Nº 12, se ve que el valor numérico de la expresión $3x^2 - 2$ depende del que se asigna a la variable x. En cambio, los valores de x no han dependido de ninguna otra cantidad; por lo cual se dice que x es una *variable independiente*.

Por el contrario, los diversos valores de la expresión $3x^2 - 2$ se han debido a las variaciones de x. Esta expresión, cuyos valores dependen de x, se llama *variable dependiente*.

La *variable dependiente* se denomina función y se representa por $f(x)$, que se lee función de x; así, se tiene:

$$f(x) = 3x^2 - 2.$$

Una circunferencia depende, evidentemente, de su radio: Si el radio es de 50 cm, la circunferencia tiene cierta longitud; si el radio fuera de 75 cm, se obtendría una circunferencia mayor que la primera; y si sólo fuese de 20 cm, resultaría otra menor.

Aquí, la variable independiente es el radio, y la variable dependiente o función es la circunferencia; es decir que la longitud de la circunferencia es función del radio.

Función es una cantidad variable ligada con otra, llamada variable independiente, tal que a toda variación de ésta corresponda una variación de la primera.

14. **Valor de una función.** **Sea la expresión algebraica**

$$f(x) = x^2 - 7x + 12.$$

Si se quieren calcular los *valores numéricos* que adquiere esta función para diferentes valores de la variable independiente x, puede procederse por *tabulación*.

Si se desea calcular el valor de esta función para un valor particular de la variable x, 2 por ejemplo, se escribe:

$$f(2) = 2^2 - 7 \times 2 + 12 = 4 - 14 + 12 = 2.$$

Análogamente:

$$f(0) = 0 - 7 \times 0 + 12 = 12.$$

EJERCICIO 1

Expresar oralmente:

1. El duplo de a, el triple de b, el quíntuplo de cd.

2. La suma de 8 números iguales a b, disminuída de la suma de 5 números iguales a d.

3. 25 aumentado del triple producto de x por y.

4. El cuádruplo de la suma de a más b, dividido entre 5.

5. El área A de 3 tiras iguales de papel, si cada tira mide a dm².

6. La altura a de una pila de 25 monedas iguales, si cada moneda tiene b mm de grueso.

7. La distancia d de 25 árboles situados de un mismo lado de una avenida, dado que cada árbol dista c m del árbol inmediato.

8. La altura de un edificio de 5 pisos iguales, si la altura de cada piso es de c m.

9. La distancia, con respecto al punto de partida, a que estará un automóvil que corre, con velocidad uniforme durante 3 horas, a razón de n km por hora.

10. El perímetro p de un cuadrado que mide a m de lado.

11. El perímetro de un cuadrilátero cuyos lados miden, respectivamente, a, b, c, d m.

12. El perímetro de un rectángulo de b m de base y a m de altura.

13. El área de un triángulo de base b y altura a, sabiendo que esa área es igual al semiproducto de la base por la altura.

14. La longitud C de una circunferencia, dado que es igual al producto del número π (pi) por el duplo del radio r, o por el diámetro d.

15. El área de un polígono regular, si se obtiene multiplicando el semiperímetro s por la apotema a.

16. Enunciar con palabras las siguientes expresiones algebraicas: $\frac{x-5}{2}$, $5(x+4)$, $10n + 3(n-2)$, $\frac{8-c}{2n}$, $84 - \frac{n}{4}$.

17. En las expresiones siguientes, decir cuáles son los coeficientes y cuáles los exponentes: $3a$, $72x^3$, $23y^4$, $12u^2v^5$, $1\,098m^2n^3$.

18. Decir la diferencia que hay entre: $2a$ y a^2, 7×4 y 7^4, $5a$ y a^5, ma y a^m.

19. Igual ejercicio que el anterior para $(a+b)^2$ y a^2+b^2, $2(a+b)$ y $(a+b)^2$, $3(a-b)$ y $(a-b)^2$.

Expresar por escrito:

20. La suma de 5 más 6, de la cual se resta 4 menos 1.

21. a más b dividido entre el séxtuplo de la diferencia m menos n.

22. El triple del número c, más el cuadrado de a, de lo cual se resta el duplo de la suma de $3a$ más $5b$.

23. El quíntuplo de la diferencia entre el número n y 4, multiplicado por la diferencia r menos s.

24. Hallar el valor de: 2^7, 3^4, 5^5, 7^3, 25^2, 11^3.

En las expresiones siguientes, $a=6$, $b=4$, $c=5$, hállese el valor numérico de:

25. $(a-b)^5$.
26. $(a-c)^6$.
27. $(b+c)^3$.
28. $(a+b-c)^3$.
29. $(a+b-c)^4-23$.
30. $(c+b-a)^6-139$.
31. $(a+b)^2-c^3$.
32. $(a^2-b^2)^2-abc$.
33. $(b^2+c^2)^2-5abc$.
34. $a^3+3ab^2-3a^2b-b^3$.
35. $(a-1)^2-(b-2)^3$.
36. $(a^2bc^3)^2-(b^2c-a^2)$.

37. Escribir 5^2 de dos maneras más.

38. Escribir $5\times5\times5$ de otras dos maneras.

39. Si $x=\frac{1}{2}$, ¿cuánto es x^4? ¿cuánto x^5?

Dado $x=3$, calcular el valor de las funciones siguientes:

40. $f(x)=(8-x)^2+9$.
41. $f(x)=x^3-3x^2+6x+7$.
42. $f(x)=x^5+5x^4-5x^2-7x-1$.
43. $f(x)=x^4-2x^3+9x^2-x-1$.

44. ¿De que es función el área A del círculo, en la fórmula $A=\pi r^2$?

45. ¿De qué es función el área A de la esfera, en la fórmula $A=4\pi r^2$?

46. El área de un rectángulo de base b y altura a, es dada por la fórmula $A=ba$. ¿De qué es función A, de la base b solamente, o sólo de la altura a, o bien de ambas a la vez?

2

ECUACIONES DE PRIMER GRADO Y SU RESOLUCION

I. DEFINICIONES

15. Término o monomio. La expresión $5x-2ab+\frac{5c}{7m}$ consta de tres partes: $5x$ (que se subentiende precedida del signo +), $-2ab$ y $+\frac{5c}{7m}$. Cada una de estas partes se llama ***término o monomio.***

Término o monomio es cada una de las partes de una expresión algebraica, separada de las demás por el signo + o por el signo —.

16. Binomio. *Llámase binomio la expresión algebraica que consta de dos términos;* v. gr.:

$$a+b,\quad a^2-b^2,\quad cd-8af,\quad \frac{2}{5}a+\frac{7}{a-4}.$$

17. Trinomio. *Trinomio es la expresión algebraica que consta de tres términos;* v. gr.:

$$x+y+z,\qquad a^2+5ab-6b^3,\qquad 7x^4-2x^3+9m.$$

18. Polinomio. *Polinomio es la expresión algebraica que consta de dos o más términos;* v. gr.:

$$a-b,\qquad c^2+2cd+d^2,\qquad 5a^2b+8cd-7mn+15c^3.$$

19. Ordenación de polinomios. Antes de efectuar ciertas operaciones, se necesita *ordenar los polinomios*, es decir, *escribir sus términos de manera que los exponentes de una misma literal vayan aumentando o disminuyendo.*

En el primer caso resulta que el polinomio está ordenado según las potencias *crecientes* o *ascendentes* de cierta literal, y en

el segundo, está ordenado según las potencias *decrecientes* o *descendentes* de dicha literal.

Así, el polinomio $ax^2 - bx^4 + 1 + cx^3 + dx^6 - x^5$, ordenado según las potencias ascendentes de x, resulta:

$$1 + ax^2 + cx^3 - bx^4 - x^5 + dx^6;$$

y, según las potencias descendentes de la misma literal:

$$dx^6 - x^5 - bx^4 + cx^3 + ax^2 + 1.$$

20. Términos semejantes. *Términos semejantes son aquellos que sólo difieren por sus coeficientes numéricos o literales;* v. gr.: $5ab$, $-7ab$, $14ab$, son términos semejantes; $2x^2$, $-13x^2$, $27x^2$, también lo son; asimismo ax, $-bx$, mx, si se consideran las literales a, b y m como coeficientes.

21. Reducción de términos semejantes. Si en un estante se colocan 8 libros, luego 12 libros más, y se quitan después 5 libros, el número de libros que aún quedan es:

$$8 \text{ libros} + 12 \text{ libros} - 5 \text{ libros} = 15 \text{ libros}.$$

Representando la palabra libro por su primera letra, se tiene:

$$8l + 12l - 5l = 15l.$$

Se ha simplificado la expresión, reduciéndola a otra más sencilla: en vez de varios términos, sólo se tiene uno. Esta operación se llama *reducción de términos semejantes.*

Para reducir términos semejantes, se suman separadamente los coeficientes precedidos del signo + y los coeficientes precedidos del signo —; luego se restan las dos sumas y se pone el resultado, afectado del signo de la mayor, como coeficiente del término único.

EJEMPLOS:

$$7m^2 - 3m^2 + 4m^2 - 2m^2 = 6m^2.$$

$$14a^2 - 9a^2 + 6 - a - 5a^2 + 3a + 3a^2 - 1 = 3a^2 + 2a + 5.$$

22. Grado de un término. *Grado de un término es la suma de los exponentes de las incógnitas que contiene;* v. gr.:

$2x$ es de primer grado;

ax^2 es de segundo grado en x;

xy es de segundo grado en xy, primero en x, y primero en y;

x^2y^3 es de quinto grado en xy, segundo en x, y tercero en y.

23. Grado de una expresión algebraica. *El grado de una expresión algebraica es el del término de mayor grado de cuantos forman la expresión;* v. gr.:

$3x^2 + 13x + 4$ es de segundo grado;

$5x^2 + 9xy^2 = 45$ es de tercer grado.

EJERCICIO 2

Decir cuál es, con respecto a x, el grado de las expresiones siguientes:

1. $4x^3 - 8x^2yz$.
2. $a^3x^5 - 2a^2x^4$.
3. $a^2y^2 + b^2x^3 - a^2b^3$.
4. $2mx + 3x^2z + 7mnx^3$.
5. $a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$.

Decir el grado de los polinomios siguientes, primero con respecto a x, y luego con respecto a y:

6. $y^3 - 4x^2y + 6y^5$.
7. $xy^3 + bx^4y^2 + b^2xy^5$.
8. $y^mx^{2n} - y^{2m}x^n$.

Ordenar los polinomios siguientes con respecto a x:

9. $4a^3x^3 - 5ax^6 + 9a^2x^7 - 4a^4x^3 + 5x + 7$.
10. $a^2b^3x - a^3b^2x^4 + ab^4 - a^4bx^2 + ab^5x^5 - a^6x^3 + b^6x^6$.
11. Ordenar los mismos polinomios con respecto a las literales a y b, respectivamente.

Redúzcanse los términos semejantes:

12. $5 - a + 3b - 4a - 2b + 7a - 4$.
13. $x^3 - x + 3x^3 - 4x + x^3 - 5x^2 + 8x - 1$.
14. $47 - 24a + 33 - 52a + 67 - 11a + 1$.
15. $6a^4 + 5a^3 + 3a^4 - 42 + 12a^3 - 5a^4$.
16. $7x^2 - 15 + 6x^3 + 23 - 6x^2 - 8x^3 + 5x^2$.
17. $4a^3 - 8a^6b^6 + 7a^2b^2 - 11a^2 - 15a^2b^2 + 7 - a^3 - 4 + a^3b^3$.

18. $5a^4b^3c + 9a^3b^3c - 11a^4b^3c + 7a^3b^3c + 18a^4b^3c - a^3b^3c$.

19. $450 - 124a^3 + 33 - 52a^3 + 67 - 11a^3 - 457 + 87a^3 + 7$.

20. Tres hombres han formado una compañía. El capital aportado por el primero es c, el del segundo es triple del del primero, y el del tercero es duplo de lo aportado por los dos primeros juntos. Exprésese, en función de c, el capital total invertido en la negociación.

21. Representando por p la población de Los Angeles, la de París quedaría representada por $2.3p$, la de Chicago por $2.7p$, la de Londres por $3.7p$, y la de Nueva York por $5.6p$. Exprésese, en función de p, la población total de estas ciudades.

II. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

24. La incógnita y su representación. Sea el siguiente problema: El costo de 5 libros iguales, más el de 3 libros iguales a los primeros, es de \$ 24. ¿Cuál es el costo de un libro?

Lo que se pregunta es el costo de un libro. En este caso, el costo es la *incógnita*, es decir, el número buscado.

Si se representa por c el costo de un libro, se puede escribir:

$$5c + 3c = 24.$$

Para representar la incógnita del problema anterior, no es indispensable usar la letra c; puede hacerse con otra cualquiera. En general, suele usarse la letra x. Haciéndolo, se tiene:

$$5x + 3x = 24. \qquad (1)$$

25. Ecuación. Reduciendo los términos semejantes en el problema del número precedente, se obtiene:

$$8x = 24.$$

Siendo 24 el producto de 8 por el número x, para obtener el factor x, basta dividir 24 entre 8; de donde:

$$x = 24 : 8 = 3.$$

La igualdad $8x = 24$, se llama **ecuación**, y sólo es cierta cuando $x = 3$. Si en lugar de 3 se pone otro número cualquiera, resulta más o menos de 24. Según esto:

Ecuación es una igualdad que sólo es cierta para un valor determinado (o valores determinados) de la incógnita; es decir, una ecuación es una igualdad condicional.

26. Miembros de una ecuación. En la ecuación $5x + 3x = 24$, el conjunto de los términos que están a la *izquierda* del signo igual, se llama *primer miembro* de la ecuación, y el término que está a la *derecha*, se denomina *segundo miembro*.

En una ecuación puede haber varios términos en cada miembro, como en $8x + 5 = 15 + 6x$.

27. Balanza y ecuación. Sea una balanza (fig. 4). Si en el platillo de la izquierda hay una pesa de 12 kg y una cajita cuyo peso se quiere averiguar, y en el de la derecha, una pesa de 18 kg que equilibra los dos platillos, habrá igual peso en ambos. Entonces, designando por x el peso de la cajita, se puede escribir:

$$12 + x = 18.$$

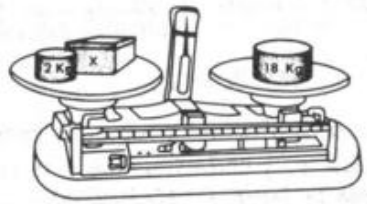


Fig. 4.

Se ve luego que el peso buscado es 6 kg, número que se obtiene restando 12 de 18.

Lo contenido en un platillo, da idea de un miembro de la ecuación, y lo contenido en el otro platillo, da idea del otro miembro.

La observación de una balanza y de los cambios que pueden hacerse con las pesas o cuerpos colocados en los platillos de aquélla, sugiere la idea de los cambios que pueden efectuarse en ambos miembros de una ecuación.

1º Si estando equilibrados los platillos, se añade un mismo peso a cada uno de ellos, dichos platillos seguirán equilibrados.

Si a cada miembro de una ecuación se suma un mismo número, la ecuación resultante es también cierta.

2º Si están equilibrados los platillos y se quita un mismo peso de cada uno de ellos, los platillos permanecerán equilibrados.

Si se quita un mismo número de cada miembro de una ecuación, la ecuación resultante es aún cierta.

3º Supuestos equilibrados los platillos y en cada uno se duplican, triplican, etc., las pesas y los cuerpos, los platillos seguirán equilibrados.

Si cada miembro de una ecuación se multiplica por un mismo número, la ecuación que resulta es aún cierta.

4º Por último, supuestos siempre equilibrados los platillos, si el contenido de cada uno se reduce a su mitad, o a su tercio, etc., permanecerá el equilibrio.

Si cada miembro de una ecuación se divide entre un mismo número (excepto el cero), la ecuación resultante es también cierta.

Estos principios, asentados como axiomáticos, se aplican a la resolución de las ecuaciones.

28. Identidad. La expresión $7a + 5a = 12a$ es siempre cierta, cualquiera que sea el valor numérico que se asigne a la literal. A las igualdades de esta naturaleza se les llama *identidades*.

Identidad es una igualdad que es cierta para cualquier valor numérico que se asigne a la literal (o literales); es una igualdad absoluta.

Para hacer constar que una igualdad es identidad, se escribe, entre sus dos miembros, el signo $\equiv$, que se lee *idéntico a*; v. gr.:

$$ab \equiv ba; \quad 4a + 6a \equiv 10a.$$

29. Resolución de una ecuación. *Resolver* una ecuación es hallar el valor de la *incógnita*.

30. Raíz o solución de una ecuación. *Se llama raíz o solución de una ecuación, el valor o valores de la incógnita que hacen cierta la igualdad.*

Así, la raíz de $3x - 9 = 5x - 23$ es 7, porque

$$3 \times 7 - 9 = 5 \times 7 - 23 = 12.$$

Asimismo, las raíces de $x^2 - 7x + 10 = 0$ son 2 y 5, porque

$$2^2 - 7 \times 2 + 10 = 5^2 - 7 \times 5 + 10 = 0.$$

31. Resolución de ecuaciones de 1er grado con una incógnita. Mediante la aplicación de los principios expuestos (Nº 27), se pueden resolver las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

EJEMPLOS: 1º Resolver la ecuación $5x - 14 = 46$.

Ecuación dada: $5x - 14 = 46.$

Súmese 14 a cada miembro: $14 = 14$

$5x = 60$

Divídase cada miembro entre 5: $x = 60 : 5 = 12.$

2º Resolver la ecuación $13x = x + 96$.

Ecuación dada: $13x = x + 96$

Réstese x de cada miembro: $x = x$

$12x = 96$

Divídase cada miembro entre 12: $x = 96 : 12 = 8.$

3º Resolver la ecuación $\frac{7x}{3} = 14$.

Ecuación dada: $\frac{7x}{3} = 14$

Multiplíquese cada miembro por 3: $7x = 42$

Divídase cada miembro entre 7: $x = 42 : 7 = 6.$

4º Resolver la ecuación $12 = \frac{84}{x}$

Ecuación dada: $12 = \frac{84}{x}$

Multiplíquese cada miembro por x: $12x = 84$

Divídase cada miembro entre 12: $x = 84 : 12 = 7.$

32. Casos más complicados. A menudo la resolución de las ecuaciones no es tan sencilla, y se necesita efectuar más operaciones para hallar el valor de la incógnita.

Sea resolver la ecuación $15 + 8n + 8 = 5n + 49 - 11.$

1º Súmese 15 y 8, y réstese 11 de 49; se obtiene:

$$23 + 8n = 5n + 38.$$

2º Réstese 23 de cada miembro; resulta:

$$8n = 5n + 15.$$

3º Réstese $5n$ de cada miembro; se obtiene:

$$3n = 15.$$

De donde: $n = 5$.

33. **Regla.** *Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, es preciso:*

1º ***Reunir en un mismo miembro los términos que contienen la incógnita, y en el otro los que no la contienen.***

2º ***Dividir ambos miembros de la ecuación así obtenida, entre el coeficiente de la incógnita.***

34. **Comprobación.** *Comprobar* una ecuación es sustituir en ella la incógnita por el valor obtenido al resolverla, para ver si se verifica la ecuación, es decir, si los dos miembros resultan iguales.

EJERCICIO 3

Dar la respuesta oralmente:

1. $x - 3 = 0$.
2. $x + 5 = 10$.
3. $x - 2 = 8$.
4. $5x = 15$.
5. $x - 7 = 18$.
6. $3x - 5 = 10$.
7. $4x = 3x + 2$.
8. $2x + 5 = 25$.
9. $x - 15 = 9$.
10. $15x - 5 = 55$.
11. $3x - 2 = 16$.
12. $6x + 2 = 14$.
13. $3x = 39\frac{6}{9}$.
14. $4x = 56\frac{4}{25}$.
15. $8x = 96\frac{32}{37}$.

Resolver por escrito y comprobar:

16. $x = 40 - x$.
17. $6x = 880 - 5x$.
18. $46 - 2x = 18$.
19. $25 = 100 - 3x$.
20. $5x = 90 - 2x$.
21. $18x = 99$.

22. $0 = 2x - 80$.
23. $4x + 44 = 64$.
24. $x = 340 - 9x$.
25. $7x - 5 = 4x + 1$.
26. $25 - x = 3x + 5$.
27. $3y - 12 = 36 - y$.
28. $10x + 4 = 52x - 1\,340$.
29. $87\,200 - 9x = 100x$.
30. $2n + 50 = n + 150$.
31. $12b + 3 = 5b + 17$.
32. $10c + 8 = 3c + 25$.
33. $2x + 9 + 6x - 4 = ?$
34. $7x + 5 - 2x + 22 = ?$
35. $22c + 14 - 17c - 8 = ?$
36. $7x - 2x + 8 = 6x + 3x - 12$.
37. $8x - 5x + 15x + 33 = ?x + ?$
38. $8a + 9 - 14a + 22a - 3 = ?a + ?$
39. $3x + 8 + 5x - 2 + x = ?x + ?$
40. $x + 6x + 2 = 14 + 3x$.
41. $21x - 7x + 5 = 18 + 3x$.
42. $12 + 9x - 3x = 48$.
43. $2 + 11z + 3 = 7z + 25$.
44. $7s - 2s + 8 = 23$.
45. $15x + 42 = 3 + 10x + 42$.
46. $11a + 13 - 3a = 29 - 3a$.
47. $3 + 2p - 6 = 11 + p$.
48. $15n - 42 - 7n = 93 - 7n - 50$.
49. $7r + 5 + 2r - 2 = 4r + 3 - 5r$.

III. ECUACIONES LITERALES

35. **Ecuación literal.** Todas las ecuaciones estudiadas en el presente capítulo, después de reunidos en un mismo miembro todos los términos que contienen la incógnita, y en el otro, las cantidades conocidas, se reducen a la forma

$$ax = b,$$

en que a y b están en lugar de números conocidos.

Esta es la forma general de las ecuaciones de primer grado con una incógnita; es una *ecuación literal.*

Ecuación literal es aquella en que algunas o todas las cantidades conocidas están representadas por letras.

36. **El paréntesis en la resolución de las ecuaciones.** Al resolver la ecuación $5x + 3x = 24$, se sumó primero $5x$ con $3x$, lo que dió $8x$, y se dividió luego 24 entre 8. Pero, en vez de efectuar la suma $5x + 3x$, se puede escribir $(5 + 3)x$, encerrando $5 + 3$ en un paréntesis, lo cual indica que el 5 y el 3 deben ser multiplicados por x. En casos como éste, se dice que la multiplicación es *distributiva.*

37. Resolución de las ecuaciones literales. **Para resolver las ecuaciones literales, se procede en la misma forma que para las ecuaciones numéricas.**

EJEMPLOS: 1º Resolver la ecuación literal $ax + bx - c = 0$.

Ecuación dada: $ax + bx - c = 0$
Súmese c a cada miembro: $ax + bx = c$
Pónganse a y b en un paréntesis: $(a + b)x = c$
Divídanse ambos miembros entre $(a + b)$: $x = \frac{c}{a+b}$.

2º Resolver la ecuación $\frac{7x-a}{6} = x + a$.

Multiplíquense ambos miembros por 6: $7x - a = 6(x + a)$
Efectúese el producto $6(x + a)$: $7x - a = 6x + 6a$
Réstese $6x$ de cada miembro y súmesele a: $x = 7a$.

38. Ventajas de las ecuaciones literales. Con las ecuaciones literales, se obtienen fórmulas aplicables no sólo a un problema determinado, sino a todos los de la *misma especie;* generalizan, por tanto, los problemas, lo cual realiza uno de los fines principales del Algebra.

Así, en Aritmética, si se representa por i el interés de cierto capital C, por r el rédito anual de \$ 1, y por t el tiempo, se obtiene la ecuación

$$i = Crt.$$

Esta ecuación puede resolverse con respecto a A, r, y t, obteniéndose:

$$C = \frac{i}{rt}; \quad r = \frac{i}{Ct}; \quad t = \frac{i}{Cr}.$$

Cualesquiera que sean los datos, basta sustituir las literales por su valor numérico, y se obtiene así el valor de la incógnita buscada.

EJERCICIO 4

Resolver oralmente las ecuaciones siguientes:

1. $x + a = b$.
2. $x - a = b$.
3. $ax = b$.
4. $\frac{x}{a} = b$.
5. $\frac{a}{x} = b$.
6. $ax - \frac{1}{b} = 0$.
7. $\frac{x}{a} - 1 = 0$.
8. $\frac{3x}{2a} = 9$.

Resuélvanse por escrito las ecuaciones siguientes:

9. $\frac{a}{x} = \frac{1}{b}$.
10. $a + x = 2x + b$.
11. $\frac{x}{a} - 1 = 3 - \frac{x}{a}$.
12. $\frac{x-a}{b} = \frac{b-x}{a}$.
13. $\frac{ax-b}{c} = bx$.
14. $\frac{x}{7} + \frac{x}{6} = m$.
15. $9a + \frac{7x+54a}{5} = 27a - x$.
16. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - c = 0$.
17. $ax - c + bx = 2ax - d - 4bx$.
18. $\frac{3x+5b}{2} = x + 4a + 3b$.

Aplíquense las fórmulas del Nº 38 al cálculo de:

19. i, dado $C = \$\,6\,000$, $t = 5$ años y $r = 8\,\% = .08$.
20. C, dado $i = \$\,1\,200$, $r = 8\,\%$ y $t = 3$ años.
21. t, dado $C = \$\,25\,000$, $i = \$\,6\,000$ y $r = 8\,\%$.
22. r, dado $C = \$\,8\,000$, $i = \$\,2\,880$ y $t = 4$ años.

En las siguientes fórmulas, calcúlese el área, designada por A, con los datos siguientes:

23. En el triángulo: $A = \frac{1}{2}ba$; $b = 78.50$ m, $a = 24.86$ m.
24. En el trapecio: $A = \frac{1}{2}(b + b')a$; $b = 18.42$ m, $b' = 12.56$ m, $a = 9.84$ m.
25. En el polígono regular: $A = \frac{1}{2}pa$; $p = 17.63$ m, $a = 2.428$ m.
26. En el círculo: $A = \pi r^2$; $\pi = \frac{22}{7}$, $r = 14$ m.
27. En la esfera: $A = 4\pi r^2$; $r = 21$ m.

En las fórmulas siguientes, V representa el volumen, B el área de la base y a la altura.

28. En el prisma: $V = Ba$, despejar 1º B; 2º a.
29. En la pirámide: $V = \frac{1}{3}Ba$, „ 1º B; 2º a.
30. En el cilindro: $V = \pi r^2 a$, „ 1º r^2; 2º a.
31. En el cono: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 a$, „ 1º r^2; 2º a.
32. En la esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, „ r^3.

3

OPERACIONES CON LOS NUMEROS ALGEBRAICOS

I. NUMEROS ALGEBRAICOS

39. Definiciones. Muchas magnitudes pueden considerarse en *dos sentidos opuestos;* así, en el comercio puede hablarse de *pérdidas* y de *ganancias;* hay temperaturas *sobre cero* y *bajo cero;* existen regiones *sobre* el nivel del mar y *bajo* dicho nivel; se hace referencia a fechas *posteriores* a cierta era o *anteriores* a ella; en la superficie de la tierra, hay lugares de *latitud norte* y de *latitud sur,* etc.

Las pérdidas y las ganancias, las temperaturas sobre cero o bajo cero, etc., constituyen, evidentemente, *diferentes clases de cantidades.* Los números con que se designan las ganancias, las temperaturas sobre cero, las latitudes norte, etc., se llaman **números positivos,** y se indican, convencionalmente, anteponiéndoles el signo +, como (+ 25)

Los números que sirven para indicar pérdidas, temperaturas bajo cero, latitudes sur, etc., se llaman **números negativos,** y se ha convenido en representarlos anteponiéndoles el signo —. Así, (— 250) pesos representa una pérdida; (— 5) grados, referido a temperatura, indica 5 grados bajo cero; — 18 grados de latitud, indica un lugar situado en el hemisferio sur.

Si un número no está precedido de ningún signo, se considera como positivo; por tanto, 25 es lo mismo que + 25.

Llámanse números algebraicos el conjunto de los números positivos y negativos, y también el cero.

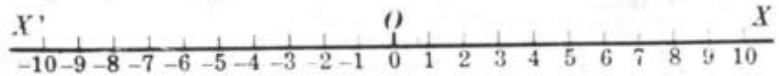


Fig. 5.

40. Escala de los números algebraicos. Sea un punto fijo O en la recta $X'X$ (fig. 5), y varios puntos señalados en ella,

de manera que la distancia entre dos puntos consecutivos sea constante. Se suele considerar los números de la *derecha* como *positivos,* y como *negativos* los de la *izquierda.* Estos números, no sólo representan un valor numérico, sino un *sentido determinado* respecto del punto de referencia *O.*

Dicha recta se denomina *escala de los números positivos y negativos.*

Nótese que cada número de la escala es menor que cualquier número que esté a su derecha; así, 2 es menor que 4, — 5 es menor que — 3, etc.

Todo número negativo es menor que cero.

41. Valor absoluto de un número algebraico. *Valor absoluto de un número algebraico es el valor aritmético de ese número, o sea, el que se obtiene suprimiendo el signo;* v. gr.: el valor absoluto de + 3 es 3, el de — 7 es 7.

El valor absoluto de un número se representa escribiendo dicho número entre dos rayas verticales, como $|+5|=5$, $|-7|=7$, que se leen: *valor absoluto* de $+5=5$, valor absoluto de $-7=7$.

Como se ve, todo número positivo es igual a su valor absoluto.

42. Números iguales, desiguales y simétricos. ***Dos números son iguales, cuando tienen el mismo valor absoluto e igual signo,*** **como + 4 y + 4, — 3 y — 3.**

Dos números son desiguales, cuando difieren por el signo, o por el valor absoluto o por el signo y el valor absoluto.

La desigualdad se indica por el signo $\neq$ que se lee: *no igual a;* así,

$-3 \neq +3$, $\quad +8 \neq +5$, $\quad +4 \neq -5$.

Dos números son simétricos, cuando sólo difieren por el signo; así, + 9 y — 9, + b y — b, son simétricos.

EJERCICIO 5

Dar la respuesta oralmente:

1. Expresar con números algebraicos: 7 unidades a la derecha del cero, 3 unidades a la izquierda, 9 unidades a la izquierda, 5 unidades a la derecha.

2. Dígase el valor absoluto de + 7, de — 8, de + 3, de $-\frac{2}{5}$.

3. ¿Qué diferencia hay entre el valor absoluto de $+5$ y de -5?

4. Dígase si los números siguientes son iguales, desiguales o simétricos: $+7$ y $+7$, -8 y -8, $+9$ y -9, -6 y -8, $+8$ y $+7$, -9 y $+6$.

5. Dígase un número no igual a $+15$, a -19, a $+72$.

6. Dígase el número simétrico de -14, de $+64$, de a, de $-b$ de $8bc$, de $-(8-x)$.

7. Si $+12$ pesos indica una ganancia, ¿qué indica -12 pesos?

8. Si \$650 representa el haber de una persona, ¿qué representa $-$\$275?

9. ¿Qué indicaría $+15$ minutos, si $(-15$ minutos indicase un cuarto de hora antes del mediodía?

10. Si al pesar paquetes de 2 kg de cierta mercancía, se pone el signo $+$ para indicar exceso de peso, ¿cómo se indicaría un defecto de peso?

11. En un libro de Cosmografía, las fechas de la reforma del calendario aparecen escritas — 46 y 1582. ¿Qué significan estas fechas?

12. ¿Cómo se indican las latitudes de París y de Buenos Aires?

13. Expresar 13° sobre cero, 2° bajo cero.

14. En una recta que representa la escala de los números algebraicos, ¿cómo quedaría indicado el punto medio entre 10 y 11? ¿y entre -7 y $+8$?

II. SUMA DE NUMEROS ALGEBRAICOS

43. Casos de la suma. 1º Sea sumar $+3$ con $+2$. Para efectuar esta suma, se puede partir del punto $+2$, en la escala de los números, y contar 3 divisiones a la derecha; así se alcanza el 5, o sea:

$$(+2)+(+3)=(+5);\ \text{o simplemente:}\ 2+3=5.$$

Para sumar -3 con -2, se parte de -2 y se cuentan 3 divisiones a la izquierda; así se llega al punto -5, o sea:

$$(-2)+(-3)=(-5);\ \text{o simplemente:}\ -2-3=-5.$$

Para sumar números algebraicos de mismo signo, se suman sus valores absolutos, y a la suma se le da el signo de los sumandos.

2º Para sumar $+5$ con -8, se parte de -8 y se cuentan 5 divisiones a la derecha, hasta llegar a -3, o sea:

$$(-8)+(+5)=(-3);\ \text{o simplemente:}\ -8+5=-3.$$

Del mismo modo se obtendría:

$$(+6)+(-4)=+6-4=2.$$

Para sumar dos números algebraicos de distinto signo, se resta el valor absoluto menor del mayor, y a la diferencia se le da el signo del número de mayor valor absoluto.

3º ***La suma de varios números algebraicos de diferentes signos, se reduce a los dos casos anteriores;*** **pues basta sumar separadamente todos los positivos y todos los negativos, aplicando el 1er caso, y luego, restar los resultados, aplicando el segundo caso; así**

$$(+7)+(+4)+(-2)+(-5)=11-7=+4.$$

$$(+5)+(-2)+(-3)+(+4)+(-1)=9-6=+3.$$

EJERCICIO 6

Sumar los siguientes números algebraicos:

1. $+5, +3, -2.$

2. $-4, +7, -5.$

3. $+6, -9, +2.$

4. $-4, +12, +7, -14.$

5. $+12, -20, -2, -9.$

6. $-1, +30, +7, -18.$

7. $+5, -4, -7, +9, -12, +10.$

8. $-9, -20, +16, +14, -9, -20.$

9. $+14, +13, +26, -28, +18, +15, -27, +48.$

10. $-18, +7, -32, -43, -36, -30, -30, +54, -37.$

Calcular el valor numérico de la expresión $a+b+c$, dado:

11. $a=+38,\ b=-25,\ c=+17.$

12. $a=+120,\ b=+17,\ c=-98.$

13. $a=-75,\ b=-68,\ c=+116.$

Calcular el valor numérico de la expresión $a+b+c+d$, si:

14. $a=+43$, $b=-23$, $c=-72$, $d=+39$.
15. $a=-78$, $b=-49$, $c=+37$, $d=-24$.
16. $a=-127$, $b=+81$, $c=+210$, $d=-89$.

III. RESTA DE NUMEROS ALGEBRAICOS

44. Casos de la resta. La *resta* es operación *inversa* de la *suma;* por tanto: *Para restar números, se procede a la inversa de como se hace para sumar.*

1º Sea restar $+5$ de $+8$. Para efectuar esta operación, se parte de 8 y se recorren 5 divisiones a la izquierda, y se llega al punto 3, o sea:

$$(+8)-(+5)=8-5=3.$$

2º Para restar $+2$ de -3, se parte de -3 y se cuentan 2 unidades a la izquierda, y se llega al punto -5, o sea:

$$(-3)-(+2)=-3-2=-5.$$

3º Para restar -8 de -3, se parte de -3 y se cuentan 8 unidades a la derecha; se llega así al punto 5, o sea:

$$(-3)-(-8)=-3+8=5.$$

Para restar un número (sustraendo) de otro (minuendo), basta sumar al minuendo el número simétrico del sustraendo.

45. Observaciones. 1ª Los resultados anteriores se obtienen también partiendo de la definición de la resta: *Restar un número (sustraendo) de otro (minuendo), es hallar un tercer número, llamado diferencia, que añadido al sustraendo reproduzca el minuendo.*

Representando pues por m el minuendo, por s el sustraendo y por d la diferencia, se tiene:

$$m-s=d;\quad \text{porque } d+s=m.$$

Y con números:

$(+10)-(+7)=10-7=+3$; porque $(+3)+(+7)=+10$.
$(+12)-(-5)=12+5=+17$; porque $(+17)+(-5)=+12$.

2ª *La suma de dos o más números no cambia de valor si se suprimen los paréntesis precedidos del signo +;* v. gr.:

$$(+15)+(-2)+(-3)+(-5)=15-2-3-5=5.$$

$$(+15)+(-2)+(-3)+(-5)=15-2-3-5=5.$$

3ª *En la resta, pueden suprimirse también los paréntesis precedidos del signo —, teniendo cuidado de cambiar el signo del número escrito entre paréntesis;* v. gr.:

$$(+8)-(-7)=8+7=15.$$

4ª Igual sucede cuando el paréntesis contiene *varios términos;* v. gr.:

$$(+9)-(-4+2-3)=9+4-2+3=14;$$

pues, puede descomponerse la operación en esta forma:

$$(+9)-(-4)-(+2)-(-3)=14.$$

EJERCICIO 7

Restar los números algebraicos siguientes:

1. $(+9)-(+7)$.
2. $(+9)-(-7)$.
3. $(-12)-(+4)$.
4. $(-12)-(-4)$.
5. $(+37)-(-25)$.
6. $(-37)-(-42)$.
7. $(+25)-(-38)$.
8. $(+43)-(+39)$.
9. $(-27)-(-47)$.
10. $(-243)-(+76)$.

Calcular el valor numérico de $P=a+b+c$, dado que:

11. $a=-26$, $b=+48$, $c=-14$.
12. $a=+37$, $b=-77$, $c=-72$.
13. $a=-84$, $b=-58$, $c=+143$.

Calcular el valor numérico de $Q=a-b+c$, si:

14. $a=-26$, $b=+48$, $c=-14$.
15. $a=+37$, $b=-77$, $c=-72$.
16. $a=-84$, $b=-58$, $c=+143$.

Calcular $P = a - b + c - d$, sabiendo que:

17. $a = +4$, $b = -7$, $c = +9$, $d = -11$.

18. $a = -25$, $b = -38$, $c = +43$, $d = +74$.

19. $a = +134$, $b = +281$, $c = -379$, $d = -591$.

Calcular $Q = a + b - c + d$, sabiendo que:

20. $a = +4$, $b = -7$, $c = +9$, $d = -11$.

21. $a = -25$, $b = -38$, $c = +43$, $d = +74$.

22. $a = +134$, $b = +281$, $c = -379$, $d = -591$.

Calcúlese el valor de $P = a - b$, dado que:

23. $a = +24$, $b = (+43 - 9)$.

24. $a = +49$, $b = (-65 + 18)$.

Calcúlese el valor de $P = a - b + c$, sabiendo que:

25. $a = +49$, $b = (+47 - 3)$, $c = (-15 + 8)$.

26. $a = (+14 - 29)$, $b = (+18 - 7 + 25)$, $c = (-23 + 46)$.

27. En la recta $X'X$, la distancia de A a D es de 547 km, de D a C es de 131 km, y de C a B es de 206 km. ¿Qué distancia hay de A a B? (fig. 6).

Fig. 6.

28. Dos autos van en el mismo sentido por una carretera. Uno de ellos ha recorrido 50 km y el otro 45 km. ¿A qué distancia se hallan uno de otro? ¿A qué distancia se hallarían, después de haber recorrido cada uno el mismo número de kilómetros que en el caso anterior, si corrieran en sentido opuesto?

29. En cierto lugar, la temperatura máxima alcanzada en el curso del año fué 32° sobre cero, y la mínima 5° bajo cero. ¿Cuál ha sido la diferencia de temperatura?

30. ¿Qué edad tenía un hombre que nació el año 63 antes de Jesucristo y murió el año 15 después de Jesucristo?

31. ¿Qué edad tenía Pitágoras al morir, si nació el año 580 antes de Jesucristo y murió el año 501 antes de Jesucristo?

32. La longitud de una ciudad es de 25° oriental, y la de otra es de 99° occidental. ¿Cuál es la diferencia de longitud entre las dos, dado que se refieren a un mismo meridiano de origen?

33. Un punto del hemisferio sur tiene 23° 37′ de latitud, y la latitud de un punto del hemisferio norte es de 19° 24′. ¿De cuánto difieren las dos latitudes?

34. ¿Qué diferencia de nivel hay entre un elevador que ha descendido en una mina a 245 m del nivel de la estación, y una casa situada a 75 m sobre el nivel de dicha estación?

35. Un buque, cuya velocidad es de 22 km por hora en agua tranquila, remonta una corriente cuya velocidad es de 7.5 km. ¿Cuánto recorre por hora?

36. Un aeroplano, cuya velocidad sería de 45 m por segundo, sin corrientes contrarias, camina contra un viento de 11 m por segundo. ¿De cuánto adelanta por segundo? ¿De cuánto por hora?

37. En un lugar, el termómetro marca 25° sobre cero, y en otro 8° bajo cero. ¿Cuál es la diferencia de temperatura entre ambos lugares?

38. Dos buques que van en sentido contrario, con una velocidad de 28 km y 25.75 km por hora, respectivamente, se han cruzado a las 8 h. 30 min. ¿A qué distancia estarán uno de otro a las 11 h.?

39. Un enfermo tiene una temperatura de 39.9°; la víspera tenía 37.5°. ¿De cuánto aumentó su temperatura?

40. ¿Qué diferencia de nivel hay entre el fondo de un pozo de 250 m y lo alto de una torre de 175 m?

IV. MULTIPLICACION DE NUMEROS

46. **Casos de la multiplicación.** En la *multiplicación* de los números se pueden distinguir 3 casos.

1º *Multiplicar dos números positivos*, como $(+4)(+3)$.

Considerando 4 como coeficiente, la operación equivale a tomar 4 sumandos iguales a $(+3)$; por tanto:

$$(+4)(+3) = (+3) + (+3) + (+3) + (+3)$$
$$= 3 + 3 + 3 + 3 = 12.$$

Como se ve, este caso es idéntico al de la multiplicación de dos números aritméticos.

2º *Multiplicar dos números de diferente signo,* tales como $(+4)(-3)$, o $(-4)(+3)$.

a) En el producto $(+4)(-3)$, considerando 4 como coeficiente, la operación indicada equivale a tomar 4 sumandos iguales a -3, es decir:

$$(+4)(-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12.$$

b) Si se considera, en el producto $(-4)(+3)$, (-4) como coeficiente, la operación indicada equivale a tomar negativamente 4 sumandos iguales a $(+3)$, es decir:

$$(-4)(+3) = -(+3) - (+3) - (+3) - (+3) = -12.$$

Resultado que, como se ve, es igual al anterior.

3º *Multiplicar dos números negativos,* como $(-4)(-3)$.

Este caso es una combinación de (a) y de (b) del caso anterior, pues equivale a tomar negativamente 4 sumandos iguales a (-3), es decir:

$$(-4)(-3) = -(-3) - (-3) - (-3) - (-3) = 12.$$

47. Observación. Los resultados anteriores pueden obtenerse recurriendo a la *escala de los números* (fig. 5); en efecto:

1º $(+4)(+3)$ indica que a partir del cero se llevan 4 veces 3 unidades a la derecha, y se alcanza así a $+12$.

2º $(+4)(-3)$ indica que a partir del cero se llevan 4 veces 3 unidades a la izquierda, y se alcanza así a -12.

3º $(-4)(+3)$ significa que se toman negativamente, a partir del cero, 4 sumandos iguales a $(+3)$, lo cual da -12.

4º $(-4)(-3)$ significa que se toman negativamente, a partir del cero, 4 sumandos iguales a -3, lo cual equivale a tomar positivamente 4 sumandos iguales a 3; se obtiene así $+12$.

En todos los casos, el valor absoluto del producto de dos números algebraicos es igual al producto de los valores absolutos de esos números.

48. Regla de los signos de un producto.

1º *El producto de dos números algebraicos de mismo signo es positivo.*

2º *El producto de dos números algebraicos de distinto signo es negativo.*

Este resultado puede indicarse simbólicamente como sigue:

$$(+)(+) = +\ ; \qquad (+)(-) = -\ ;$$
$$(-)(-) = +\ ; \qquad (-)(+) = -\ .$$

49. Producto de varios números. **Llámase *producto de varios números* el resultado de multiplicar el primero por el segundo, luego el producto obtenido por el tercero, y así sucesivamente.**

Para obtener el producto de varios números se multiplican sus valores absolutos y se da al producto el signo + si todos los factores son positivos o hay un número par de factores negativos. Pero si el número de factores negativos es impar, se da al producto el signo −

Por tanto, puede escribirse:

$$(-5)(+4)(-2)(+3) = +120.$$
$$(+5)(-4)(-2)(-3) = -120.$$

50. Potencia de un número **Teniendo en cuenta la definición del producto de varios números, y aplicando la regla de los signos, se tiene:**

$$(+4)^3 = (+4)(+4)(+4) = +64.$$
$$(-5)^4 = (-5)(-5)(-5)(-5) = +625.$$
$$(-3)^5 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = -243.$$

1º *Toda potencia de un número positivo es positiva.*

2º *Las potencias de un número negativo son positivas si el exponente es par.*

3º *Las potencias de un número negativo son negativas si el exponente es impar.*

EJERCICIO 8

1. $(-4)(+7)$.
2. $(+8)(-13)$.
3. $(-11)(-2)$.
4. $(+5)(-14)$.
5. $(-7)(+12)$.
6. $(-11)(-3)$.
7. $(+7)(-5)(+2)$.
8. $(-4)(-6)(-3)$.
9. $(-9)(+2)(-1)$.
10. $(+8)(-3)(+2)$.
11. $(-24)(+5)(-7)$.
12. $(-30)(-4)(-5)$.
13. $(+42)(-21)(-10)$.
14. $(-5)(+3)(-7)(-8)$.
15. $(+13)(-6)(-9)(+14)$.
16. $(+7)(-5)(+8)(-11)(-6)$.

17. $(-5)^3$.
18. $(-7)^2$.
19. $(+4)^4$.
20. $(+2)^6$.
21. $(+3)^4$.
22. $(-4)^3$.
23. $(-2)^5$.
24. $(+8)^2$.
25. $(-5)^5$.

26. En una mina, un elevador baja a razón de 4 m por segundo. ¿Dónde se hallará, con respecto al nivel de la estación, a los 10 segundos? ¿a los 30 segundos? ¿al minuto?

27. Un punto del océano se halla a 2 000 m bajo el nivel del mar. Expresar una profundidad triple.

28. Si en el aire tranquilo un aeroplano vuela a razón de 160 km por hora, ¿cuánto volará en 7 horas, contra un viento de 24 km por hora?

29. En un juego de azar, una persona perdió \$ 75 cuatro veces seguidas, y en cinco ocasiones ganó \$ 36 cada vez. ¿Cuál es su estado de cuentas?

30. La temperatura, en cierto lugar, era de 2° sobre cero a las 2 de la madrugada. Si el termómetro bajó a razón de 2° por hora, ¿qué temperatura había a las 6 h. 30 min. de la mañana?

MULTIPLICACION DE NUMEROS ALGEBRAICOS

(Continuación).

51. **Producto de una suma por un número.** Sea multiplicar

$$(+5)+(-2)+(+3) \text{ por } (-4).$$

La operación se indica de la manera siguiente:

$$(+5-2+3)(-4).$$

El producto puede obtenerse de dos maneras:

1º *Efectuar la suma indicada en el primer paréntesis y luego multiplicar el resultado por* (-4); así se obtiene:

$$(+5)+(-2)+(+3)=+6; \quad (+6)(-4)=-24.$$

2º *Multiplicar cada sumando por* (-4), *según la propiedad distributiva, y después sumar los productos obtenidos:*

$$(+5)(-4)+(-2)(-4)+(+3)(-4)=-20+8-12=-24.$$

52. **Producto de dos sumas algebraicas.** Sea multiplicar $(+5)+(-2)+(+3)$ por $(+7)+(-4)$.

La operación se indica como sigue:

$$[(+5)+(-2)+(+3)]\,[(+7)+(-4)],$$

en que el *paréntesis rectangular* [ ] es signo de *agrupación*.

El producto puede obtenerse de dos maneras distintas, como en el primer caso, o sea:

1º *Efectuar, en cada paréntesis rectangular, la suma indicada y multiplicar los dos resultados:*

$$(+5)+(-2)+(+3)=+6; \quad (+7)+(-4)=+3.$$

$$[(+5)+(-2)+(+3)][(+7)+(-4)]=(+6)(+3)=+18.$$

2º *Multiplicar todo el multiplicando por cada término del multiplicador, y luego sumar los productos parciales.*

$$[(+5)+(-2)+(+3)](+7)+[(+5)+(-2)+(+3)](-4)$$

$$35-14+21-20+8-12=64-46=+18.$$

53. Producto de potencias de un mismo número. Sea multiplicar

$$(-2)^3 \text{ por } (-2)^4.$$

Según lo explicado anteriormente (Nos. 49 y 50), se tiene:

$$(-2)^3=(-2)(-2)(-2).$$

$$(-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2).$$

$$(-2)^3(-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)$$

$$=(-2)^{3+4}=(-2)^7.$$

De un modo análogo, se obtendría:

$$(+2)^3(+2)^4(+2)^2 = (+2)^{3+4+2} = (+2)^9.$$

El producto de dos o más potencias de un número es otra potencia de dicho número, cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes de los factores.

EJERCICIO 9

1. Hallar el valor de $P = (a+b)c$, para los siguientes valores de las literales: $a = +3$, $b = -2$, $c = +7$.

2. ¿Cuál es el valor de $Q = (a+c)b$, si se dan a las literales los valores siguientes: $a = -5$, $b = +4$, $c = -3$.

3. ¿Cuál es el valor de $M = (b+c)a$ para los valores siguientes de las literales: $a = +7$, $b = -3$, $c = -6$

Efectuar las operaciones indicadas a continuación:

4. $(+4-2+5)(-3+6)$.

5. $(-1+3-4)(+7-5)$.

6. $(+5-2+3-1)(+4-1)$.

7. $(-10+3)(+5-1)+(-5+2)(+7-4)$.

8. $(+8-2+9)(-4+2)+(-5-4+3)(+5-2)$.

Hállense los valores numéricos de las expresiones siguientes, dado que: $a = -2$, $b = +4$, $c = -5$, $d = +3$.

9. $(a+b)(c+d)$. **10.** $(a+b-c)d$.

Calcular los valores numéricos de los ejercicios siguientes para: $a = +5$, $b = -3$, $c = +2$, $d = -4$.

11. $(a-b+c-d)(a+b)$. **12.** $(a+b-c+a)(b-c)$.

¿Cuáles son los valores de las expresiones siguientes, sabiendo que: $a = +4$, $b = -7$, $c = -1$, $d = +6$.

13. $(-a+b+c-d)(a+c)$. **14.** $(a-b-c+d)(c-d)$.

Hállense los valores de las operaciones indicadas a continuación para: $a = -3$ $b = +5$, $c = +4$, $d = -2$.

15. $(-a-b+c+d)(d-a)$. **16.** $(a+b-c-d)(a+d)$.

Efectuar las siguientes operaciones:

17. $(+2)^2(-3)^2$. **21.** $(-3)^3(-3)^2$

18. $(-3)^3(-1)^4$. **22.** $(+5)^2(+5)^4$.

19. $(-1)^5(+5)^2$. **23.** $(-4)^3(-4)$.

20. $(+2)^4(-1)^3$. **24.** $(-2)^5(-2)^2$.

25. $(+2)^2(+2)^3-(-3)^2(-3)^3$.

26. $(-5)^2(-5)+(-1)^2(-1)^5$.

27. $(-4)^2(-4)^3-(-2)^3(-2)+(-1)^3(-1)$.

28. $(+3)(+3)^2+(-5)(-5)^3-(+2)^3(+2)$.

29. $(-1)^4(-1)^5+(+2)(+2)^2-(-3)^2(-3)$.

30. $(-6)^2(-6)-(+5)^2(+5)+(-4)^3(-4)$.

V. DIVISION DE NUMEROS ALGEBRAICOS

54. Casos de la división. La *división* es una operación ***inversa*** de la *multiplicación*, que tiene por objeto hallar uno de dos factores (cociente), cuando se conoce su producto (dividendo) y el otro factor (divisor). Por tanto: *Para dividir, se procede a la inversa de como se hace en la multiplicación.*

Las casos se pueden resumir como sigue:

$(+18) : (+3) = +6$; porque $(+6)(+3) = +18$.
$(+18) : (-3) = -6$; porque $(-6)(-3) = +18$.
$(-18) : (+3) = -6$; porque $(-6)(+3) = -18$.
$(-18) : (-3) = +6$; porque $(+6)(-3) = -18$.

En todos los casos, *el valor absoluto del cociente es igual al cociente de los valores absolutos de los dos números.*

55. Regla de los signos de un cociente

1º ***El cociente de dos números de mismo signo es positivo.***

2º ***El cociente de dos números de distinto signo es negativo.***

Este resultado puede indicarse simbólicamente como sigue:

$(+) : (+) = +$; $(+) : (-) = -$;
$(-) : (-) = +$; $(-) : (+) = -$.

56. División de una suma algebraica entre un número. ***Para dividir una suma algebraica entre un número, se divide cada sumando entre dicho número, y luego se suman los resultados parciales.***

Sea dividir $(-24) + (+15) + (-9)$ entre (-3).

La operación se indica de la manera siguiente:

$$[(-24) + (+15) + (-9)] : (-3).$$

Luego, se divide cada término del dividendo entre el divisor, y se suman los cocientes parciales:

$$(-24) : (-3) + (+15) : (-3) + (-9 : (-3) = +8 - 5 + 3 = +6.$$

En efecto:

$$[(+8) + (-5) + (+3)] (-3) = -24 + 15 - 9.$$

El mismo cociente se obtendría efectuando primero la suma indicada en el paréntesis rectangular y dividiendo después el resultado entre (-3).

57. División de potencias de un mismo número. **Al multiplicar $(-2)^3$ por $(-2)^4$, se sumaron los exponentes. Siendo la división operación inversa de la multiplicación, para dividir $(-2)^7$ entre $(-2)^4$, bastará restar los exponentes; de donde:**

$$(-2)^7 : (-2)^4 = (-2)^{7-4} = (-2)^3.$$

El cociente de dos potencias de un mismo número, es otra potencia de dicho número con un exponente igual al exponente del dividendo menos el del divisor.

EJERCICIO 10

Efectúense las operaciones indicadas a continuación:

1. $(+30) : (+5)$.
2. $(-20) : (+2)$.
3. $(+15) : (-3)$.
4. $(-16) : (-4)$.
5. $(+35) : (-7)$.
6. $(-1\,150) : (-25)$.
7. $(+3\,250) : (-125)$.
8. $(-1\,748) : (+24)$.
9. $(+4\,617) : (-243)$.
10. $(-3\,675) : (-175)$.

11. $(+12 + 27 - 36 + 54 + 96) : (-3)$.
12. $(+25 - 40 + 35 - 205 - 10) : (-5)$.
13. $(-35 + 140 - 49 - 77 + 210) : (-7)$.
14. $(+45 - 18 + 108 - 27 + 360) : (-9)$.
15. $(+5 - 7)(-9 + 12) : (+2)$.
16. $(-4 + 9 - 36)(+5 - 3) : (-2)$.
17. $(+13 - 3 + 8)(+8 - 5 + 7) : (-9)$.
18. $(+5 - 7 - 4)(+3 - 7 - 9) : (-6)$.
19. $(+6)^7 : (+6)^5$.
20. $(-2)^{12} : (-2)^9$.
21. $(-5)^7 : (-5)^4$.
22. $(-8)^{12} : (-8)^{10}$.
23. $(+7)^4 : (+7)^2$.
24. $(-9)^5 : (-9)^2$.

25. Un padre, al morir, deja a sus 3 hijos una deuda de \$ 2 784 ($-2\,784$ pesos). ¿Qué parte corresponde a cada uno, si se la reparten por igual?

26. Dos buques, con velocidad respectiva de 27 y 21 km por hora, van en sentido contrario. ¿Dentro de cuánto tiempo, después de haberse cruzado, estarán a 144 km de distancia uno de otro?

27. Durante cuatro días seguidos se ha anotado una temperatura mínima de 0°, 1.5°, $-3°$ y $-3.5°$, respectivamente. ¿Cuál es la temperatura mínima media?

4

SUMA Y RESTA ALGEBRAICAS

I. SUMA

58. Casos de la suma. En la *suma algebraica* se pueden distinguir 3 casos.

1º Sumar dos monomios.
2º Sumar dos polinomios.
3º Sumar varios polinomios.

59. Suma de monomios. Sea sumar los siguientes monomios:

$$5a, -4b; \quad 3b, -8b, -4c.$$

Las sumas pedidas pueden indicarse así:

$$(+5a)+(-4b)=5a-4b.$$
$$(+3b)+(-8b)+(-4c)=3b-8b-4c=-5b-4c.$$

Para sumar varios monomios, se escriben unos a continuación de otros, con sus respectivos signos, y se hace luego la reducción de términos semejantes, si los hay.

60. Suma de dos polinomios. La suma de dos polinomios se reduce a la suma de monomios.

Sea, por ejemplo, sumar

$$-4a+9b^2-11a^2+8m \quad \text{con} \quad 5a+b^2+5a^2.$$

La operación se indica del modo siguiente:

$$(5a+b^2+5a^2)+(-4a+9b^2-11a^2+8m).$$

Agrupando los términos semejantes y reduciendo, se tiene:

$$5a-4a+b^2+9b^2+5a^2-11a^2+8m=a+10b^2-6a^2+8m.$$

Para sumar dos polinomios se escriben todos sus términos unos a continuación de otros, con sus respectivos signos, agrupando los términos semejantes, y se hace luego la reducción.

61. Suma de varios polinomios. *Si se tienen que sumar más de dos polinomios, se procede en igual forma que para dos*

En la práctica, para facilitar la reducción de los términos semejantes, conviene ordenar los polinomios y escribir los términos semejantes en una misma columna, como se ve a continuación.

Sea sumar los tres polinomios siguientes:

$$6a^2x^2+x^4+a^4-4a^3x-4ax^3+9,$$
$$7ax^3-7a^2x^2+5a^3x+3a^4-x^4-5,$$
$$2a^4-a^3x+2a^2x^2-10ax^3-3x^4-3.$$

Se los dispone como sigue:

$$\begin{array}{r} a^4-4a^3x+6a^2x^2-4ax^3+x^4+9 \\ 3a^4+5a^3x-7a^2x^2+7ax^3-x^4-5 \\ \underline{2a^4-a^3x+2a^2x^2-10ax^3-3x^4-3} \\ 6a^4+0+a^2x^2-7ax^3-3x^4+1. \end{array}$$

Reducidos los términos semejantes de cada columna, se obtiene, para la suma buscada:

$$6a^4+a^2x^2-7ax^3-3x^4+1.$$

EJERCICIO 11

Sumar los siguientes monomios y reducir:

1. 12 m, 7 m.
2. \$15, \$13.
3. $13x$, $28x$.
4. $-4x$, $13x$.
5. $4x$, $-7x$, $+9x$.
6. $4mx$, $5mx$.
7. $-6mx$, $9mx$.
8. $4cd$, $-6cd$.
9. $3ab$, $-2ab$, $5ab$.
10. $2(a+b)$, $4(a+b)$.
11. $3(c+d)$, $-2(c+d)$.
12. $2(a-b)$, $3(a-b)$.
13. $3a$, $5b^2$, $-7a$, $4b$, $-4b^2$, 1.
14. x^3, $-x^3$, x, -1, x^4, x^3, x^2, $-x$, 1.
15. $4a^2b$, $6a^2b^2$, $-3a^2b$, $7a^2b^2$, $-6a^2b^2$.

Sumar los siguientes polinomios y reducir:

16. $a+b-c$, $a-b+c$.

17. $a+b+c$, $a+b-c$, $a-b+c$, $b+c-a$.

18. $10a-3b+7c$, $9a+5b-4c$.

19. $9a^2-4ab+3b^2$, $7a^2+9ab-4b^2$.

Supuesto que:

$A=a+b+c$, $C=a+b-c$,
$B=a-b+c$, $D=b+c-a$,

formar las siguientes expresiones:

20. $A+B$. 23. $C+D$.

21. $A+D$. 24. $A+B+C$.

22. $B+C$. 25. $B+C+D$.

Sumar los siguientes polinomios:

26. $-4x^3+3x^2-7x+1$,
$3-4x^2+7x^3+6x$,
$4x^3+6x-4+4x^2$.

27. $x^3-3a^2x^2+3a^4x$,
$3a^2x^2+x^3+3a^4x$,
$-2x^3+4a^2x^2-6a^4x$.

28. $b+b^2-15-2a$,
$3a^2+4b-b^2+a$,
$1-5b+4a^2+2a$.

29. $4x^3-6x^2+3x-2$,
$6x^3-3x^2+2x-4$,
$3x^3-2x^2+4x-6$,
$2x^3-4x^2+6x-3$.

30. $-9x^3+8x^2-7x+6$,
$8x^3+6x-7x^2+10$,
$10x-9+6x^2-7x^3$,
$-7x^2-5x^3+11x-7$.

Si $F(a)=a^3-2a^2b+5b^2-2ab^2$, $F_1(a)=2a^3+3a^2b+2b^2$,
y $F_2(a)=3a^3-4a^2b-3ab^2-4b^2$,

calcular:

31. $F(a)+F_1(a)$. 33. $F_1(a)+F_2(a)$.

32. $F(a)+F_2(a)$. 34. $F(a)+F_1(a)+F_2(a)$.

II. RESTA

62. Casos de la resta. En la *resta algebraica*, se pueden considerar dos casos:

1º El sustraendo es un monomio.

2º El sustraendo es un polinomio.

63. El sustraendo es un monomio. **Sea restar**

$-5bc$ de $3ax$, y $-8x$ de $2nx^2-15x+42$.

Se puede escribir:

$$(+3ax)-(-5bc)=3ax+5bc.$$
$$(+2nx^2-15x+42)-(-8x)=2nx^2-15x+42+8x$$
$$=2nx^2-7x+42.$$

64. El sustraendo es un polinomio. Sea restar

$3a^2b-3ab^2+3a^3-4b^3$ de $4a^3-4b^3-2a^2b+3ab^2$.

La operación se indica como sigue:

$$(4a^3-4b^3-2a^2b+3ab^2)-(3a^2b-3ab^2+3a^3-4b^3).$$

Para obtener la diferencia pedida, se suma algebraicamente al polinomio minuendo el polinomio simétrico del sustraendo.

Haciéndolo, resulta:

$$(4a^3-4b^3-2a^2b+3ab^2)+(-3a^2b+3ab^2-3a^3+4b^3).$$

Efectuando la operación, según lo explicado en la suma algebraica, se tiene:

$$\begin{array}{r} 4a^3-2a^2b+3ab^2-4b^3 \\ -3a^3-3a^2b+3ab^2+4b^3 \\ \hline a^3-5a^2b+6ab^2. \end{array}$$

65. Comprobación de la resta. Para hacer la *comprobación*, súmese la diferencia obtenida con el sustraendo; si la operación está bien hecha, la suma reproduce el minuendo.

Así, la prueba de la última resta da efectivamente el minuendo:

$$\begin{array}{r} a^3-5a^2b+6ab^2 \\ 3a^3+3a^2b-3ab^2-4b^3 \\ \hline 4a^3-2a^2b+3ab^2-4b^3. \end{array}$$

66. Caso particular de la resta. Sea restar

$3x-(4+2x)$ de $4x$.

La operación se indica del modo siguiente:

$$4x-[3x-(4+2x)].$$

Quitando el *paréntesis redondo* en el sustraendo, resulta:

$$3x-(4+2x)=3x-4-2x.$$

La diferencia pedida es pues:

$$4x - (3x - 4 - 2x) = 4x - 3x + 4 + 2x = 3x + 4.$$

En casos como éste, en que aparecen *paréntesis redondos* y *rectangulares*, suprímanse primero los paréntesis redondos que hubiere en los paréntesis rectangulares, y efectúese después la resta indicada.

EJERCICIO 12

Efectuar las operaciones indicadas y reducir:

1. $8x - 3x$.
2. $18bx - 5bx$.
3. $21x^3 - 7x^3$.
4. $12ab - 3ab$.
5. $7ab - 3\frac{1}{2}ab$.
6. $8(a-b) - 6(a-b)$.
7. $6 \times 3x - 5 \times 2x$.
8. $3b - (-b)$.
9. $7xy - (-2xy)$.
10. $a - (-a)$.
11. $(a+b) - (a-b)$.
12. $40 - (-30)$.
13. $a - (a-b)$.
14. $a^3 - (-4a^3)$.
15. $1 - (1-a)$.
16. $(a+b+c+d) - (a-b+c-d)$.
17. $(a-b+c-d) - (b-a-c+d)$.
18. $(4a-20) - (3a-40)$.
19. $(a+1) + (3a-4) - (2a-10)$.
20. $(a-b) - (a+b) - (b-a)$.
21. $x^3 - y^3 - (x^3 + y^3 - 2xy)$.
22. $(a-b) + (b-a) - (a+b) - (b-a)$.
23. $(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$.
24. $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) - (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$.
25. $(x-y) - (y+z-v) + (v+y-z) + (2y-x)$.
26. $x^3 - (y^2 - z^2) + b^2 - (x^2 + z^2) + y^2 - (x^2 + y^2)$.
27. $(x + 2y - 6z) - [3y - (6x - 6y) + 6z]$.
28. $(a+b-c) - (a-b+c) + (b-a+c) - (c-a-b)$.
29. $(5y^3 - 3xy + 2x^2) - (5y^3 - 6xy) - 9x^2$.
30. $55x - [32a - (8b + 3a - 6x) - (3x + 5ab - 4b)]$.
31. $a^3 - [a^3 - (a^3 - 2ab + b^2) + 2ab - b^2]$.

Dado que:

$$A = a + b + c, \qquad C = a + b - c,$$
$$B = a - b + c, \qquad D = b + c - a,$$

calcular el valor de las siguientes expresiones:

32. $A + B - C$.
33. $A + B - D$.
34. $A - D + C$.
35. $B + C - D$.
36. $A - B + C$.
37. $A + D - C$.
38. $A - D - C$.
39. $(A + B) - (C + B)$.

Supuesto que:

$$A = a^3 - 2a^2b + ab^2 - 2b^3, \qquad C = 4a^2b + ab^2 - 4b^3,$$
$$B = 2a^3 + 3ab + 2b^2, \qquad D = 3a^3 - 4a^2b - 3ab^2 - 4b^3,$$

calcular el valor de las siguientes expresiones:

40. $A - B$.
41. $A - D$.
42. $C - D$.
43. $A - B + C$.
44. $A - C + D$.
45. $B - C + D$.
46. $C - B - A$.
47. $(A + B) - (C + D)$.
48. $(A - B) - (C - D)$.
49. $A - (B + C + D)$.

50. Si un ciclista camina hoy $(3a - 20)$ km y ayer recorrió $(5a - 30)$ km, ¿cuántos kilómetros ha recorrido en todo?

51. En un paseo una persona da $(a + 40)$ pasos al ir, y $(2a - 1\,300)$ pasos al regresar. En otro paseo, da $(3a - 3\,260)$ pasos menos que en el anterior. ¿Cuántos pasos ha dado en el último?

52. Hace 10 años, la edad de un hombre era a; ¿qué edad tendrá dentro de 5 años? ¿y dentro de 10 años?

53. ¿Qué edad tiene ahora el hombre del problema anterior, y qué edad tenía hace 15 años?

54. Si un número es igual a $2a - b + 2$, ¿cuál es el número que lo supera en $a + b - 2$? ¿Qué número es inferior al primero en $2a + b - 4$?

55. Un obrero gana cierto día una suma a y gasta b; al día siguiente gana $2a - b$ y gasta $b - 4$. ¿Cuánto le queda?

56. La edad de un niño es a; la de su hermano es el doble menos 5 años. ¿Cuál es la suma de las dos edades?

57. El padre de los niños de que se habla en el problema anterior tiene 15 años más que la suma de las edades de sus dos hijos ¿Cuál es la suma de las tres edades?

5

MULTIPLICACION ALGEBRAICA

I. PRODUCTO DE POTENCIAS Y DE MONOMIOS

67. Casos de la multiplicación. En la *multiplicación algebraica* se distinguen cuatro casos:

1º Multiplicar dos potencias de una misma literal.

2º Multiplicar dos monomios.

3º Multiplicar un polinomio por un monomio.

4º Multiplicar dos polinomios.

68. Regla de los signos. Cualquiera que sea el caso que se considere, se aplica la regla de los signos ya dada, a saber:

1º *El producto de dos factores de mismo signo es positivo.*

2º *El producto de dos factores de distinto signo es negativo.*

69. Producto de potencias de una misma literal. Sea multiplicar a^2 por a^3.

Según lo explicado ya anteriormente,

$$a^2 = a \times a.$$
$$a^3 = a \times a \times a.$$
$$a^2 \times a^3 = a \times a \times a \times a \times a = a^{2+3} = a^5.$$

De manera análoga, se obtendría:

$$a^2 \times a^5 \times a^3 = a^{2+5+3} = a^{10}.$$
$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Por estos ejemplos se ve que: *El producto de dos o más potencias de una misma literal, es otra potencia de dicha literal cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes de los factores.*

70. Producto de dos mononios. Sea multiplicar

$8ax$ por $-5a^2y$, y $7a^4b^3d$ por $9a^6bc^3d^2$.

Se puede escribir:

$$(+8ax)(-5a^2y) = 8(-5) \times a \cdot a^2 \times x \cdot y = -40a^3xy.$$
$$(+7a^4b^3d)(+9a^6bc^3d^2) = 7 \cdot 9 \times a^4 \cdot a^6 \times b^3 \cdot b \times c^3 \times d \cdot d^2$$
$$= 63a^{10}b^4c^3d^3.$$

Por tanto: *Para multiplicar dos monomios, se multiplican los coeficientes y luego las literales.*

71. Producto de varios monomios. *Se obtiene el producto de varios monomios, multiplicando el primero por el segundo, el producto así obtenido por el tercero, y así sucesivamente;* v. gr.:

El producto de $-4a^3b^5$ por $7a^2b^6$ por $-2ab^3$, es igual a:

$$(-4a^3b^5)7a^2b^6(-2ab^3) = (-28a^5b^{11})(-2ab^3) = 56a^6b^{14}.$$

72. Potencia de un monomio. Sea elevar x^2 al cubo.

Basta efectuar el producto de tres factores iguales a x^2, o sea:

$$(x^2)^3 = x^2 \times x^2 \times x^2 = x^{2\times 3} = x^6.$$

Análogamente, se obtendría:

$$(5a^2b^3)^3 = 5a^2b^3 \times 5a^2b^3 \times 5a^2b^3$$
$$= 5^3 \times a^{2\times 3} \times b^{3\times 3} = 5^3a^6b^9.$$

Y en general: $(ax^my^n)^p = a^px^{mp}y^{np}$.

Para elevar un monomio a una potencia determinada, hay que multiplicar el exponente de cada factor por el de la potencia.

EJERCICIO 13

Calcular los productos siguientes:

1. $(-1)^2(-1)^4$.
2. $(-7)^2(-7)^3$.
3. $(-10)^4 \times 2^3$.
4. $2x \times 3ax$.
5. $(-3c) \times 8c^2d$.
6. $7an \times 2a^2n$.
7. $4a^2x \times 3ax^4$.
8. $(-3ay) \times 7a^2y^5$.
9. $2ax^2 \times 2ax^4$.
10. $a^5 \times a^7$.
11. $a^{12} \times a^5$.
12. $(-a^3) \times a^6$.
13. $(-a^2) \times a^3 \times a^4$.
14. $(-a)(-a)^3 \times a^5 \times a^7$.

15. $(-a)(-a)^2 \times a^3$.
16. $x^3y^2 \times x^4y^4$.
17. $xy(-2xy) \times 3xy$.
18. $3x \times 4y \times 5x^2y^3$.
19. $(-7ab) \times 8a^2 \times 7bc$.
20. $4a^2b \times 2ab^2x(-5abx^3)$.

21. $(-\frac{1}{3}) \times \frac{1}{4} \times (-\frac{2}{7}) \times 12 \times 14$.
22. $96 \times (-\frac{1}{4})^2 \times 5 \times (-\frac{2}{3})$.
23. $2 \times (-3)^3 (-4)^2 \times \frac{5}{36}$.
24. $32a^5b^4c^2d \times 4a^3bc^4f$.
25. $(-44a^4b^3c^5d^2f) \times \frac{1}{4} a^5b^2c^3f^3h$.
26. $7ab^2c^3 \times 2a^2bc \times (-5a^4b^5c^2)$.
27. $4a^4b^3c^2 \times (-8a^3b^2c^3x^4y^4) \times 4a^2bc^4$.
28. $(-18x^2y)(-6y^3) \times x^3y^2$.
29. $x^4(-z^3)(-8x^2)(-2x)(-4)$.
30. $x^2 \times 2yz(-y^2)(-z^2)(-2xy)$.

31. $(a^2)^2$.
32. $(a^3)^3$.
33. $(a^5)^2$.
34. $(-a^2)^2$.
35. $(-a^3)^3$.
36. $(-a^2)^3(-a)^2$.
37. $(-a)^2(-a^2)^2$.
38. $(2^3 \times 5^4)^2$.
39. $(-2^3 \times a^4)^3$.
40. $(4a^2b^3c^4)^2$.
41. $(a^3)^m$.
42. $(a^2b^3)^m$.

II. PRODUCTO DE POLINOMIOS

73. Producto de un polinomio por un monomio. **Sea multiplicar, $2-4+9$ por a.**

La operación, según se dijo (N° 51), puede llevarse a cabo de dos maneras: efectuando la operación indicada en el multiplicando, y multiplicar luego el resultado por el multiplicador:

$$(2-4+9) \times a = 7 \times a = 7a,$$

o bien, multiplicar cada término del multiplicando por el multiplicador, y reducir después los términos semejantes:

$$(2-4+9) \times a = 2a - 4a + 9a = 7a.$$

Si el polinomio consta de términos algebraicos cualesquiera, se procede siempre de esta última manera; v. gr.:

$$(a-b+c-d)m = am - bm + cm - dm.$$

De donde: *Para multiplicar un polinomio por un monomio, se multiplica cada término del polinomio por el monomio, y se hace la suma algebraica de los productos parciales.*

74. Aplicaciones. 1º Multiplicar $a^2 - 2ab + b^2$ por a^2.

Según la regla anterior:

$$(a^2 - 2ab + b^2)a^2 = a^2 \times a^2 - 2ab \times a^2 + b^2 \times a^2 = a^4 - 2a^3b + a^2b^2.$$

2º Hallar el producto de $a^3 - b^3 - 2d^4$ por $-3a^2bc^4d$.

$$(a^3 - b^3 - 2d^4)(-3a^2bc^4d) = a^3(-3a^2bc^4d) - b^3(-3a^2bc^4d) - 2d^4(-3a^2bc^4d),$$

es decir:

$$(a^3 - b^3 - 2d^4)(-3a^2bc^4d) = -3a^5bc^4d + 3a^2b^3c^4d + 6a^2bc^4d^5.$$

Nota. — Si se tiene que multiplicar un monomio por un polinomio, se *invierte el orden de los factores*, y se procede como en el caso anterior.

75. Producto de dos polinomios. Sea multiplicar

$$A = a - b \quad \text{por} \quad B = a' - b'.$$

Se puede escribir:

$$A \times B = (a-b)(a'-b').$$

Según lo que se acaba de explicar en la multiplicación de un polinomio por un monomio, se tiene sucesivamente:

$$\begin{aligned} A \times B &= (a-b)B = a \times B - b \times B \\ &= a(a'-b') - b(a'-b') \\ &= (aa' - ab') - (a'b - bb') \\ A \times B &= aa' - ab' - a'b + bb'. \end{aligned}$$

De este resultado se deduce que: *Para multiplicar dos polinomios, se multiplica el primero por cada uno de los términos del segundo, y se suman algebraicamente los resultados parciales.*

76. Aplicación. Multiplicar $a^2 - 2ab + b^2$ por $m - n$.

Según la regla, hay que multiplicar primero $a^2 - 2ab + b^2$ por m, lo que da como primer producto parcial:

$$(a^2 - 2ab + b^2)m = a^2m - 2abm + b^2m;$$

y luego multiplicar $(a^2 - 2ab + b^2)$ por $-n$, lo que da como segundo producto parcial:

$$(a^2 - 2ab + b^2)(-n) = -a^2n + 2abn - b^2n.$$

El producto que se busca es la suma de los dos productos parciales, es decir:

$$a^2m - 2abm + b^2m - a^2n + 2abn - b^2n.$$

77. Regla práctica. *Para facilitar la reducción de términos semejantes en la multiplicación de dos polinomios, se ordena cada uno de ellos según las potencias ascendentes o descendentes de una misma literal, y se escriben uno debajo de otro. Se multiplican luego todos los términos del multiplicando por cada término del multiplicador, empezando por la izquierda; se escriben después los productos parciales de modo que sus términos semejantes, si los hay, se correspondan en columna, y se hace la reducción.*

78. Aplicación de la regla anterior. Sea **hallar el producto** de los dos polinomios:

$$a^2 + b^2 - 2ab \quad \text{y} \quad a^2 - b^2 + 4ab.$$

Los dos polinomios ordenados con respecto a las potencias decrecientes de a, se colocan, según la regla, de este modo:

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 + 4ab - b^2 \\ \hline a^4 - 2a^3b + a^2b^2 \\ \quad + 4a^3b - 8a^2b^2 + 4ab^3 \\ \quad\quad - a^2b^2 + 2ab^3 - b^4 \\ \hline a^4 + 2a^3b - 8a^2b^2 + 6ab^3 - b^4. \end{array}$$

Para multiplicar el polinomio $a^2 - 2ab + b^2$ por a^2, se dice:

$$a^2 \times a^2 = a^4, \quad -2ab \times a^2 = -2a^3b, \quad b^2 \times a^2 = a^2b^2.$$

El primer producto parcial es, por lo tanto:

$$a^4 - 2a^3b + a^2b^2,$$

que se escribe debajo del multiplicador.

Se obtiene el producto de $a^2 - 2ab + b^2$ por $4ab$ diciendo:

$$a^2 \times 4ab = 4a^3b, \quad -2ab \times 4ab = -8a^2b^2, \quad b^2 \times 4ab = 4ab^3;$$

lo que da por segundo producto parcial:

$$4a^3b - 8a^2b^2 + 4ab^3.$$

Se escribe este polinomio debajo del producto parcial anterior, haciendo corresponder los términos semejantes.

Por último, se forma el tercer producto parcial mediante la multiplicación de $a^2 - 2ab + b^2$ por $-b^2$ diciendo:

$$a^2 \times (-b^2) = -a^2b^2, \quad -2ab \times (-b^2) = 2ab^3, \quad b^2 \times (-b^2) = -b^4.$$

El producto que de ello resulta es:

$$-a^2b^2 + 2ab^3 - b^4.$$

Después de escribirlo debajo de los otros dos productos parciales ya hallados, se hace la suma de dichos tres polinomios, y se obtiene:

$$a^4 + 2a^3b - 8a^2b^2 + 6ab^3 - b^4,$$

que es el producto buscado.

EJERCICIO 14

Efectuar las siguientes operaciones:

1. $(a + b)a$.
2. $(a^3 + c)b$.
3. $(a - b + c)ac$.
4. $(a - c)(-bc)$.
5. $(a + b - c)(-ac)$.
6. $(a^2 + b^2)ab$.
7. $(a + 1)a^3$.
8. $(-a^3 + a - 1)(-a^3)$.
9. $(4a^2 - a^3)a^4$.
10. $(1 - 2xy + 5x^3)(-4xy^3)$.
11. $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)(-2a^3b^3)$.
12. $(x^m - x^{2m}y + y^n)x^my^n$.
13. $(x^3 - x^2 + x - 1)(-x^3)$.
14. $(3a + b - 4c)7a^3$.
15. $(a^4 - b^4 - a^4b^4)(-ab)$.
16. $(11ab - 10a^2 + 8b^2)(-3a^2b^2)$.
17. $a^3b^3c^3[-(a + b + c) - (ab + ac + bc)]$.
18. $(12 - 12x^2y^2 + 15x^3 - 24y^3)(-14x^3y^3)$.

Multiplicar los polinomios siguientes:

19. $(a + x)(a + 2x)$.
20. $(x - 1)(x - 2)$.
21. $(x + 10)(x - 12)$.
22. $(a + b)(x - y)$.
23. $(a + b - c)(a - b)$.
24. $(x^3 - 1)(x^4 + 1)$.

25. $(a^3+b^3-c^3)(a^2-b^2+c^2)$.
26. $(b-4a^3+3a^2b)(b-4a^2)$.
27. $(5-3a)(6+2a-7b)$.
28. $(x^3+y^3-xy)(x^3-y^3+xy)$.
29. $(a+b)(a-b)(a-1)$.
30. $(2x-1)(1-3x)(1-x)$.

Ordénese y efectúense las operaciones indicadas:

31. $(2ab+b^2+a^2)(a^2+b^2-2ab)$.
32. $(1+a^3-a-a^2)(a+1-a^2+a^3)$.
33. $(a^4+1+a^2+a)(1-a)$.
34. $(-1+a^5+a-a^4-a^2+a^3)(a+1)$.
35. $(3x^3y^2-5x^2y)(x-xy)$.
36. $(a^3b^2-ab-1)(a^2b^2+ab+1)$.
37. $x(x-1)-(x-1)(x-2)$.
38. $x(x-1)(x+1)-(x-1)^2x$.
39. $2x^2(x^2-5)(x^2+5)-2x^6$.
40. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)$.
41. $(a^3+3ab^2-3a^2b-b^3)(a^2+b^2-2ab)$.
42. $(a^4+b^4+2a^2b^2)(1-a^2+b^2)$.
43. $(4ax^3+3a^2x^4-1)(3x^2-1)(-x^3)$.
44. $(4a^4x^4+3a^3x^3-2a^2x^2)(2a^2x^3-3a^3x^3)$.
45. $(b^2-4a^2b+4a^4)(4a^4+b^4+4a^2b^2)$.
46. $(x^4-x-x^3+x^2+1)(1+x^4-x^2)$.
47. $(6x^2-4x^3-4x)(1+x^3+2x)$.
48. $(1-2a^3-6a^6+4a^4+8a^8)(5a^5+a-3a^3-7a^7)$.

49. Se distribuye cierta cantidad entre tres personas: la 1ª recibe \$ a, la 2ª el décuplo de lo que se dió a la 1ª, y la 3ª el duplo de lo entregado a las dos primeras juntas. ¿Cuál es la cantidad distribuída?

50. Lo que un número x supera a otro b, es el triple de este último, y además, $b-11$. Calcular la suma de los dos números.

51. Las tres dimensiones de un paralelepípedo rectángulo son a, b y c. Calcúlese la superficie total, o suma de las áreas de las seis caras.

52. En una bolsa hay \$ 56. Primero se sacan \$ a, luego \$ $(a \times n)$ y \$ $(a-n)$; la tercera vez se saca tanto como entre las dos primeras veces. ¿Cuántos pesos quedan?

53. El ancho a de un rectángulo es 10 m menos que lo largo; ¿cuál es su área A? ¿Cuál sería el área de otro rectángulo cuyas dimensiones fueran dobles de las anteriores?

54. Las bases de un trapecio son b y b', respectivamente. ¿Cuál es el área, si la altura es igual a la suma de las dimensiones anteriores menos 5 m?

55. La base de un triángulo es $(a+3)$ m, y su altura $(2a-5)$ m. ¿Cuál es su área?

56. Un rectángulo tiene $(a+b)$ m de ancho, y $(c+d)$ m de largo. ¿Cuál sería su superficie, si tuviese 3 m más de largo y 2 m menos de ancho?

6

PRODUCTOS NOTABLES

79. **Cuadrado de un binomio.**—Sea

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$

en que a y b representan números algebraicos cualesquiera, positivos o negativos.

Aplicando la regla de la multiplicación de polinomios, se tiene:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

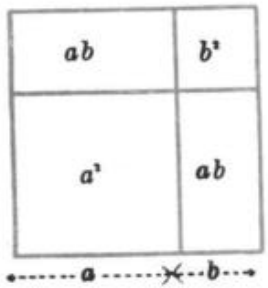


Fig. 7.

Por tanto: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Este resultado puede expresarse así: *El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto de los dos términos, más el cuadrado del segundo.*

Notas. — 1ª El signo + delante de $2ab$, indica simplemente que el producto de los dos términos del binomio se toma con su *propio signo*, es decir, el que corresponde según la regla de los signos. Los términos a^2 y b^2 son siempre positivos.

2ª La fig. 7 ofrece una *explicación geométrica* del cuadrado de un binomio.

80. **Aplicaciones.** Elevar al cuadrado

$$4a+3x,\quad 4a-3x,\quad -2x^2+5y,\quad -2x^2-5y.$$

Según la regla anterior, resulta:

$$(4a+3x)^2 = 16a^2+24ax+9x^2.$$
$$(4a-3x)^2 = 16a^2-24ax+9x^2.$$
$$(-2x^2+5y)^2 = 4x^4-20x^2y+25y^2.$$
$$(-2x^2-5y)^2 = 4x^4+20x^2y+25y^2.$$

81. **Producto de dos binomios conjugados.** Sea multiplicar $a+b$ por $a-b$, binomios que sólo difieren por el signo del segundo término y que se llaman *binomios conjugados.*

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2 \quad -b^2 \end{array}$$

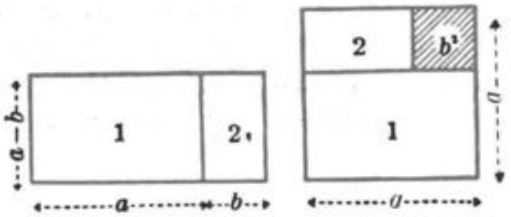


Fig. 8.

Luego: $$(a+b)(a-b) = a^2-b^2.$$

El producto de dos binomios conjugados es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.

La fig. 8 ofrece una *explicación geométrica* del producto de dos binomios conjugados.

82. **Aplicaciones.** De acuerdo con lo que se acaba de explicar, se obtienen los productos siguientes:

$$(a+1)(a-1) = a^2-1.$$
$$(5a+3b^2)(5a-3b^2) = 25a^2-9b^4.$$
$$(a^2+b^2)(a^2-b^2) = a^4-b^4.$$

83. **Observaciones.** — 1ª A veces hay que multiplicar dos trinomios que constan de los mismos términos, pero con alguna variante en los signos. En esos casos, se puede calcular el producto aplicando la fórmula anterior, como se ve en los siguientes ejemplos:

$$(a+b+3)(a+b-3) \quad \text{y} \quad (x-y+z)(x+y-z).$$

a) Considerando $(a+b)$ como un solo término, se puede escribir:

$$(a+b+3)(a+b-3) = [(a+b)+3][(a+b)-3]$$
$$= (a+b)^2-3^2 = a^2+2ab+b^2-9.$$

b). El primer factor $(x-y+z)$ puede escribirse: $x-(y-z)$; por tanto:

$$(x-y+z)(x+y-z) = [x-(y-z)][x+(y-z)]$$
$$= x^2-(y-z)^2 = x^2-y^2+2yz-z^2.$$

2ª Las fórmulas de los Nos. 79 y 81 pueden utilizarse en los cálculos aritméticos; v. gr.:

Efectuar las operaciones siguientes:

$$34^2 = (30+4)^2 = 30^2+2\times30\times4+4^2 = 900+240+16 = 1\,156.$$
$$29^2 = (30-1)^2 = 30^2-2\times30\times1+1^2 = 900-60+1 = 841.$$
$$53\times47 = (50+3)(50-3) = 50^2-3^2 = 2\,500-9 = 2\,491.$$
$$127^2-123^2 = (127+123)(127-123) = 250\times4 = 1\,000.$$

EJERCICIO 15

Aplicando las fórmulas de los Nos. 79 y 81, calcular:

1. El cuadrado de 65 y de 37.
2. El cuadrado de 29 y de 48.
3. La diferencia 64^2-26^2 y 17^2-13^2.

Efectuar las operaciones siguientes:

4. $(c+d)^2$.
5. $(c-d)^2$.
6. $(x+4)^2$.
7. $(x-7)^2$.
8. $(a+5)^2$.
9. $(2a-1)^2$.
10. $(a^2+2)^2$.
11. $(a^2+b^2)^2$.
12. $(2a^2-3b^2)^2$.

13. $(5a^4b - 7ab^3)^2$.
14. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$.
15. $\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$.
16. $\left(2a+\frac{1}{4}\right)^2$.
17. $(ab + cd)^2$.
18. $(ab - cd)^2$.
19. $(c + d)(c - d)$.
20. $(x + 4)(x - 4)$.
21. $(2a + 2b)(2a - 2b)$.
22. $(7a^3b + 5a^2c)(7a^3b - 5a^3c)$.
23. $\left(\frac{7c}{3}+\frac{3b}{2}\right)\left(\frac{7c}{3}-\frac{3b}{2}\right)$.
24. $(a + b + 7)(a + b - 7)$.
25. $(4 + x + y)(4 + x - y)$.
26. $[8 + (m - n)][8 - (m - n)]$.
27. $(x + y - 3)(x - y + 3)$.

Indicar lo que falta a los binomios siguientes para ser cuadrados perfectos:

28. $a^2 + b^2$.
29. $b^2 - 2ab$.
30. $4a^2 + 8a$.
31. $16a^2 - 8a$.
32. $1 - 2a$.
33. $x^2 - 10xy$.
34. $a^2x^4y^2 + 8ax^2yz$.
35. $1 + 4x^2$.
36. $4a^2 + 4b^2$.
37. $25x^2 + 100$.
38. $4x^2 - 4x$.
39. $x^4 + 2x^2$.
40. $144x^2y^2 + 1$.
41. $16x^2 + 4$.
42. $25y^4 + 1$.
43. $b^2 - 14ab$.
44. $-36xy + 4y^2$.
45. $81y^2 - 18xy$.
46. $49x^4y^4 - 28x^3y^3$.
47. $9x^2 + 16$.

Efectuar las operaciones siguientes, aprovechando las fórmulas estudiadas:

48. $(a + 1)^2 - (a + 1)$.
49. $(a + n)^2 - (a^2 + n^2)$.
50. $(a + 1)^2 - (a - 2)^2$.
51. $(a + n)(a - n) - (a - n)^2$.
52. $(7ab - 3cd)^2 - (7ab + 3cd)^2$.
53. $(x + y + 7)(x + y - 7)$.
54. $(p + q + 3)(p + q - 3)$.
55. $(a + b - 5)(a + b + 5)$.

56. $(x + y^2 + 2)(x + y^2 - 2)$.
57. $(x - 5 + y)(x + 5 - y)$.
58. $(3ab - 2cd)(3ab + 2cd) + 4c^2d^2$.
59. $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$.
60. $(x^2 - 3ab + 5a^2)(x^2 + 3ab - 5a^2)$.
61. $(a^2b^2 - 6 + 4b^2)(a^2b^2 + 6 - 4b^2)$.
62. $(a + 7)(7 - a)$.
63. $(x + 2)(2 - x)$
64. $(x + y)(x - y)(x^2 + y^2)$.
65. $(x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$.

PRODUCTOS NOTABLES
(Continuación).

84. Cubo de un binomio. Sea el binomio $a + b$, en que a y b representan términos algebraicos cualesquiera, positivos o negativos.

Se puede escribir:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^2(a + b).$$

Reemplazando $(a + b)^2$ por su valor, $a^2 + 2ab + b^2$, resulta:

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Luego: $$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

85. **Aplicaciones.** Elevar al cubo:

$$2x+3,\quad 2x-4,\quad -5x+2y,\quad -5x-4y.$$

$$(2x+3)^3 = (2x)^3 + 3\times(2x)^2\times 3 + 3\times 2x\times 3^2 + 3^3$$
$$= 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27.$$

$$(2x-4)^3 = (2x)^3 + 3\times(2x)^2(-4) + 3\times 2x(-4)^2 + (-4)^3$$
$$= 8x^3 - 48x^2 + 96x - 64.$$

$$(-5x+2y)^3 = (-5x)^3 + 3\times(-5x)^2\times 2y + 3\times(-5x)(2y)^2 + (2y)^3$$
$$= -125x^3 + 150x^2y - 60xy^2 + 8y^3.$$

$$(-5x-4y)^3 = (-5x)^3 + 3\times(-5x)^2(-4y) + 3\times(-5x)(-4y)^2 + (-4y)^3$$
$$= -125x^3 - 300x^2y - 240xy^2 - 64y^3.$$

86. **Observación.** La fórmula obtenida para el cubo de un binomio, puede utilizarse en los cálculos aritméticos; v. gr.:

Efectuar las operaciones siguientes:

$$43^3 = (40+3)^3 = 40^3 + 3\times 40^2\times 3 + 3\times 40\times 3^2 + 3^3$$
$$= 64\,000 + 14\,400 + 1\,080 + 27 = 79\,507.$$

$$18^3 = (20-2)^3 = 20^3 + 3\times 20^2(-2) + 3\times 20(-2)^2 + (-2)^3$$
$$= 8\,000 - 2\,400 + 240 - 8 = 5\,832.$$

87. **Suma de dos cubos de la forma (a^3+b^3).** — **Esta suma es el producto del binomio $a+b$ por el trinomio a^2-ab+b^2.**

Para comprobarlo, efectúense las operaciones; se obtiene:

$$\begin{array}{l} a^2 - ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 - a^2b + ab^2 \\ \quad + a^2b - ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 \qquad\qquad + b^3 \end{array}$$

O sea: $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3.$

La suma de los cubos de dos números es igual al producto de la suma algebraica de esos números, por un trinomio que consta del cuadrado del primer número, menos el producto de los dos, más el cuadrado del segundo.

88. **Diferencia de dos cubos de la forma a^3-b^3.** Esta diferencia proviene del producto del binomio $a-b$ por el trinomio a^2+ab+b^2:

Efectivamente, se tiene:

$$\begin{array}{l} a^2 + ab + b^2 \\ a - b \\ \hline a^3 + a^2b + ab^2 \\ \quad - a^2b - ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 \qquad\qquad - b^3 \end{array}$$

Es decir: $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3.$

La diferencia de los cubos de dos números es igual al producto de la diferencia algebraica de esos números, por un trinomio que consta del cuadrado del primer número, más el producto de los dos, más el cuadrado del segundo.

EJERCICIO 16

Elevar al cubo los binomios siguientes:

1. $a+1$.
2. $a-1$.
3. $2a+b$.
4. $a-3b$.
5. $x+5$.
6. $4x^2-1$.
7. $7a+3b$.
8. $5ab-2c$.
9. $-3x+2$.
10. $-2n-3$.
11. $-3y+4$.
12. $-5z-3$.
13. x^3-y^3.
14. $-11x^2+1$.

Efectuar las operaciones siguientes:

15. $(a+1)(a^2-a+1)$.
16. $(c-d)(c^2+cd+d^2)$.
17. $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$.
18. $(a+1)^3-a^3$.
19. $(a+b)^3-(a-b)^3$.
20. $(x-1)^3-(x+1)^3$.
21. $(a+b)^3-2(a+b)(a-b)^2$.
22. $(x+2)^4-(x+2)^3$.

¿Qué falta a cada uno de los polinomios siguientes para ser cubo perfecto?

23. $a^3+b^3+3a^2b$.
24. $a^3-b^3+3ab^2$.
25. $8a^3+36a^2b+54ab^2$.
26. $8a^3-36a^2b-27b^3$.

Indíquese la multiplicación de dos factores cuyo producto sea:

27. $c^3 + d^3$.
28. $8c^3 - d^3$.
29. $27a^3 + 64b^3$.
30. $a^3b^3 - 125c^3d^3$.
31. $64a^3b^3 + 216c^3d^3$.
32. $\frac{8a^3}{27} + \frac{27b^3}{64}$.

PRODUCTOS NOTABLES

(Continuación).

89. Producto de dos binomios que tienen un término común. Sean los binomios $x + a$ y $x + b$.

Su producto es:

$$\begin{array}{r} x + a \\ x + b \\ \hline x^2 + ax \\ \quad + bx + ab \\ \hline x^2 + (a+b)x + ab \end{array}$$

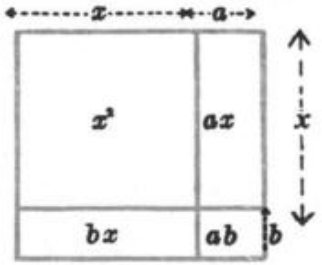


Fig. 9.

Por tanto: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.

Es decir: *El producto de dos binomios que tienen un término común, es igual al cuadrado de dicho término, más el producto del mismo por la suma algebraica de los otros dos términos, más el producto de éstos.*

Nota. — La fig. 9 ofrece una *explicación geométrica* del producto de dos binomios que tienen un término común.

90. Aplicaciones. — Efectuar los productos siguientes:

$(x + 5)(x + 2) = x^2 + (5 + 2)x + 5 \times 2 = x^2 + 7x + 10$.
$(x + 4)(x - 3) = x^2 + (4 - 3)x + 4 \times (-3) = x^2 + x - 12$.
$(x - 9)(x - 2) = x^2 + (-9 - 2)x + (-9)(-2) = x^2 - 11x + 18$.

91. Cuadrado de un polinomio. 1º Sea el trinomio $T = a + b + c$, en que, como en el caso de un binomio, a, b y c representan números cualesquiera.

Considerando $a + b$ como un solo término, se puede aplicar la fórmula del binomio, o sea:

$$\begin{aligned} T^2 &= (a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 \\ &= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \end{aligned}$$

$$T^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

2º Sea el polinomio $P = m - n + r - s$, que hay que elevar al cuadrado. Considerando la diferencia $m - n$ como un solo término y lo mismo $r - s$, se puede escribir:

$$\begin{aligned} (m-n+r-s)^2 &= [(m-n)+(r-s)]^2 \\ &= (m-n)^2+2(m-n)(r-s)+(r-s)^2 \\ &= m^2-2mn+n^2+2mr-2ms-2nr+2ns+r^2-2rs+s^2. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$P^2 = m^2+n^2+r^2+s^2-2mn+2mr-2ms-2nr+2ns-2rs.$$

El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de sus términos, más el doble producto algebraico de estos mismos términos, tomados de dos en dos.

92. Aplicaciones. Elevar al cuadrado:

$2a + 3b + c$, y $a^2 + 2b - 3c$.

Según la regla anterior, se tiene:

$$(2a + 3b + c)^2 = 4a^2 + 9b^2 + c^2 + 12ab + 4ac + 6bc.$$
$$(a^2 + 2b - 3c)^2 = a^4 + 4b^2 + 9c^2 + 4a^2b - 6a^2c - 12bc.$$

93. Cubo de un trinomio. Sea el trinomio $T = a + b + c$, que se quiere elevar al cubo.

Si se considera $a + b$ como un solo término, se puede aplicar la fórmula del cubo de un binomio, y así se obtiene el desarrollo siguiente:

$$\begin{aligned} T^3 &= (a+b+c)^3 = [(a+b)+c]^3 \\ &= (a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3 \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3. \end{aligned}$$

$$T^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc.$$

El cubo de un trinomio es igual a la suma de los cubos de cada uno de los términos, más el triple producto del cuadrado de cada

término por cada uno de los términos restantes, más el séxtuplo del producto de los términos del trinomio.

EJERCICIO 17

Calcular los productos siguientes, aplicando las fórmulas estudiadas:

1. $(x+3)(x+5)$.
2. $(x+7)(x+2)$.
3. $(x+8)(x+3)$.
4. $(x+9)(x+4)$.
5. $(x+6)(x+10)$.
6. $(x+p)(x+q)$.
7. $(x-8)(x-3)$.
8. $(x-10)(x-5)$.
9. $(x-p)(x-q)$.
10. $(a-9)(a+12)$.
11. $(a-bc)(a-d)$.
12. $(m-n)(m+b)$.
13. $(5x+7)(5x+11)$.
14. $(6p+5q)(6p+3q)$.
14. $(3m-6n)(3m-2n)$.
16. $(a^2b+c)(a^2b+d)$.
17. $(a^3b^3+c^3)(a^3b^3+c^3)$.
18. $(a^7b-c)(a^7b-c^3)$.
19. $(x^n+y^m)(x^n+y^n)$.
20. $(x^my^n+5)(x^my^n+7)$.
21. $(x^3y^3-3)(x^3y^3-5)$.
22. $(x+y+z)^2$.
23. $(2x+3y+z)^2$.
24. $(2a+5b+3c)^2$.
25. $(5a-b+2c)^2$.
26. $(3x-5y+2z)^2$.
27. $(x-3y-5z)^2$.
28. $(a+b+c+d)^2$.
29. $(2x+2y+3z+5v)^2$.
30. $(2a+b+c)^2$.
31. $(a^2+2b+c)^2$.
32. $(a+b^2-2c)^2$.

7

DIVISION ALGEBRAICA

I. DIVISION DE POTENCIAS Y DE MONOMIOS

94. Casos de la división. En la *división algebraica* se distinguen cuatro casos:

1º Dividir dos potencias de una misma literal.

2º Dividir dos monomios.

3º Dividir un polinomio entre un monomio.

4º Dividir dos polinomios.

95. Regla de los signos.

1º ***El cociente de dos números de mismo signo es positivo.***

2º ***El cociente de dos números de distinto signo es negativo***

96. División de dos potencias de una misma literal. Sea dividir a^8 entre a^5.

En la multiplicación de potencias de una misma literal, se suman los exponentes. Siendo la división operación inversa de la multiplicación, para dividir potencias de una misma literal, bastará proceder a la inversa de como se procedió para la multiplicación, o sea, restar los exponentes; por tanto:

$$a^8 : a^5 = a^{8-5} = a^3.$$

Y en general: $$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

El cociente de dos potencias de una misma literal, es otra potencia de esa literal, cuyo exponente es igual al del dividendo menos el exponente del divisor.

97. Aplicaciones. Según lo que se acaba de exponer, se puede escribir:

$$x^9 : x^4 = x^{9-4} = x^5.$$
$$(-a^7) : a^4 = -a^{7-4} = -a^3.$$
$$y^8 : (-y^6) = -y^{8-6} = -y^2.$$
$$(-a^m) : (-a^n) = a^{m-n}.$$

98. División de dos monomios. Sea dividir $24a^2$ entre $6a$, y $36a^5b^6c^7d$ entre $4a^3b^4c^6$.

1º Siendo el dividendo el producto del divisor por el cociente que se busca, 24 es el producto de 6 por el coeficiente del cociente; dicho coeficiente es, pues, $24 : 6 = 4$.

Del mismo modo, a es la parte literal del cociente, porque

$$a \times a^{2-1} = a^2.$$

Por consiguiente, el cociente buscado es $4a$.

2º El coeficiente del cociente del segundo ejemplo, es el cociente de los coeficientes, o sea, $36 : 4 = 9$.

Análogamente, la parte literal es como sigue:

a^2, porque a^2, o sea, $a^{5-3} \times a^3 = a^5$.
b^2, „ b^2, „ $b^{6-4} \times b^4 = b^6$.
c, „ c, „ $c^{7-6} \times c^6 = c^7$.
d, „ d, „ $d \times 1 = d$.

Luego: $36a^5b^6c^7d : 4a^3b^4c^6 = 9a^2b^2cd$.

En estos dos casos, todas las literales del divisor están en el dividendo; además, todas las de éste son de grado superior o igual a las correspondientes de aquél. En tales casos se ve que:

1º *El coeficiente del cociente de dos monomios, es el cociente de los valores absolutos de los coeficientes del dividendo y del divisor.*

2º *Cada literal, de las que forman el dividendo, interviene en el cociente con un exponente calculado de acuerdo con lo explicado en el Nº 96; a menos que una misma literal tenga igual exponente en el dividendo y en el divisor; en este caso no se escribe, por ser su cociente igual a 1.*

3º *Las literales que sólo están en el dividendo, aparecen en el cociente con su respectivo exponente.*

99. Caso particular. *Si una o varias literales del divisor fueran de grado superior a las correspondientes del dividendo, o figuraran en aquél y no en éste, el cociente se puede indicar en forma de quebrado, haciendo en él las simplificaciones posibles.*

Dichas simplificaciones se fundan en esta propiedad: *Pueden dividirse el dividendo y el divisor entre un mismo número, sin que varíe el cociente.*

Así, el cociente de $16a^6b$ entre $8a^5b^2c^2$, se obtiene dividiendo ambos términos entre $8a^5b$:

$$\frac{16a^6b}{8a^5b^2c^2} = \frac{16a^6b : 8a^5b}{8a^5b^2c^2 : 8a^5b} = \frac{2a}{bc^2}.$$

100. Exponente cero. En la división de un monomio entre otro monomio, se puede llegar a expresiones de la forma x^0. ¿Tiene algún significado x^0?

Sea dividir x^5 entre x^5.

Por ser iguales el dividendo y el divisor, resulta:

$$x^5 : x^5 = 1.$$

Por otra parte, según la regla de la división de potencias de una misma literal, se tiene:

$$x^5 : x^5 = x^{5-5} = x^0.$$

Por tanto: $x^0 = 1$.

Luego: *Toda cantidad con exponente cero es igual a* 1.

Dedúcese de esto que un número cualquiera con exponente cero no carece de sentido, si bien se interpreta en forma muy distinta de la expuesta en el Nº 9.

101. Aplicaciones. Sean los ejemplos siguientes:

$9^0 = 1$.
$1\,000^0 = 1$.
$(ax^2 + bx + c)^0 = 1$.
$3a^0 - 2 + 4b^0 - d^0 = 3 - 2 + 4 - 1 = 4$.

102. Exponente negativo. En la misma división de monomios, también puede resultar la expresión x^{-m}.

Sea dividir x^4 entre x^7.

Según la regla de la división de potencias de una misma literal,

$$x^4 : x^7 = x^{4-7} = x^{-3}.$$

Por otra parte, esta misma división puede indicarse:

$$\frac{x^4}{x^7} = \frac{x^4 : x^4}{x^7 : x^4} = \frac{1}{x^3}.$$

De donde: $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$.

Y en general: $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$.

Toda cantidad con exponente negativo equivale a un quebrado cuyo numerador es 1, *y el denominador es la misma cantidad con exponente positivo.*

Cualquier factor del numerador de una fracción puede pasar al denominador, cambiando el signo del exponente, y viceversa.

103. Aplicaciones. Sean los ejemplos siguientes:

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}. \qquad \frac{4}{a^{-5}} = 4a^5.$$

$$\frac{ab^{-2}}{c} = \frac{a}{cb^2}. \qquad \frac{ab}{c^{-2}d^{-1}} = abc^2d.$$

EJERCICIO 18

Efectuar las operaciones indicadas.

1. $x^7 : x^3$.
2. $x^5 : x^2$.
3. $(-x^{12}) : x^4$.
4. $(-a^{11}) : a^7$.
5. $a^6 : (-a^2)$.
6. $a^{21} : a^3$.
7. $a^5 : (-a^5)$.
8. $(-7^{11}) : (-7^6)$.
9. $(-a^7) : (-a^4)$.

10. $a^7 : a^4$.
11. $(-a^{12}) : (-a^3)$.
12. $a^{1+p} : a^p$.
13. $a^{2m+4} : a^{m-4}$.
14. $(5^4 \times 3^5) : (5^3 \times 3^2)$.
15. $7^{4m+2} : 7^{4m}$.
16. $a^{m+n} : a^{m-n}$.
17. $x^5 : (-x^7)$.
18. $a^{2m} : a^{3m}$.
19. $b^{m+2n} : b^{m+3n}$.
20. $24a^5 : (-12a^4)$.

Efectuar las operaciones indicadas o simplificar.

21. $a^5b^4 : (-a^3b^3)$.
22. $8a^5b^4c^3df^6 : (-4a^4b^3cdf^6)$.
23. $ax^3y^4z^2 : 4a^2x^5y^4z^2$.
24. $(-27a^7b^4c^3d^5) : (-25a^6b^4c^3d^6)$.
25. $9a^5b^2c^3 : (-18a^4c^4)$.
26. $(-5a^3b^2) : (-10a^4b^3)$.
27. $(-a^4x^3y^6z^3) : a^3x^5y^6z^4$.
28. $a^mx^n : (-a^{3m}x^{2n})$.
29. $15a^5 : 25a^4$.
30. $(-250a^4b) : 100a^3$.
31. $(-7^4 \times 3^2 \times 4^6) : (7^3 \times 3^3 \times 4^7)$.
32. $441a^5b^3 : (-21^2a^4b^3)$.
33. $(3a^2b^5 \times 4a^3b^4c) : (7a^2b^4 \times 28a^3b^3c)$.
34. $a^{2m}b^{3n}c^{4p} : a^mb^{2n}c^{3p}$.
35. $a^5x^{m+1}y^{n+1} : a^3x^{m-1}y^{n-1}$.
36. $(-35a^2 \times 24a^3b^4) : (-7a^2b^4 \times 48a^3b^3)$.
37. $[(a-1)^4(x+1)^3(y-1)^4] : [(a-1)^3(x+1)^3(y-1)^4]$.

Efectuar las siguientes operaciones, sin que aparezcan, en el resultado, el exponente cero, ni exponentes negativos.

38. $a^0 : a$.
39. $a^0 : a^3$.
40. $a : a^0b$.
41. $ab^3 : ab^0$.
42. $a^{-2} : a^3$.
43. $3^{-3} : 3^{-4}$.
44. $a^{-1} : a$.
45. $a^{-3} : a^4$.
46. $a^3 : a^{-3}$.
47. $ab^{-3} : a^{-3}b$.
48. $(a^0 + b^0) : (c^0 + 1)$.
49. $2^0a^m : \frac{3^0}{a+2b}$.
50. $(a^0 + b^0 - 6c^0 + 4d^0)(a^3 + b^3)$.
51. $a^2 \times a^0 \times a^{4-3} \times a^4$.
52. $(a^m : a^{-m})a^{2m}$.
53. $(a^2 : a^{-5}) : (a^3 \times a^{-5})$.
54. $(1+a)^0 : (1+a)^{-1}$.
55. $3^{-5} \times 4^{-2} \times 3^6 \times 4^3$.

56. $12(3^0-2)(4^0-2)$.

57. $\frac{3^0}{4^{-3}} : \frac{3^{-1}}{4^3}$

58. $(a^{-2}b^5 : a^2b^{-3})\frac{1}{a^{-3}b^{-3}}$.

59. $(a^{-2} : a^{-3}) : (a^{-4} \times a^3)$.

II. DIVISION DE POLINOMIOS

104. División de un polinomio entre un monomio. *Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada término del polinomio entre el monomio, y se suman algebraicamente los resultados.*

Sea dividir el polinomio $a - b + c - d$ entre m.

El cociente pedido es:

$$(a - b + c - d) : m = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m} - \frac{d}{m}.$$

Efectivamente:

$$\left(\frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m} - \frac{d}{m}\right) m = a - b + c - d.$$

Con lo cual queda demostrada la regla enunciada.

105. Aplicación.— Hallar el cociente de $8a^5 - 4a^4b + 28a^3b^2 - 12a^2b^3$ entre $4a^2$.

Según la regla anterior, se tiene:

$$(8a^5 - 4a^4b + 28a^3b^2 - 12a^2b^3) : 4a^2 = \frac{8a^5}{4a^2} - \frac{4a^4b}{4a^2} + \frac{28a^3b^2}{4a^2} - \frac{12a^2b^3}{4a^2}$$
$$= 2a^3 - a^2b + 7ab^2 - 3b^3.$$

106. División de dos polinomios.— Sea dividir

$$4x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 35x - 25 \text{ entre } 2x^2 + 4x - 5.$$

Se comienza por ordenar ambos polinomios con respecto a una misma literal (generalmente según las potencias decrecientes), y se dispone la operación del modo siguiente:

dividendo	$4x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 35x - 25$	$2x^2+4x-5$ divisor
	$-4x^4 - 8x^3 + 10x^2$	$2x^2-3x+5$ cociente
1er residuo	$-6x^3 - 2x^2 + 35x - 25$	
	$+6x^3 + 12x^2 - 15x$	
2º residuo	$+10x^2 + 20x - 25$	
	$-10x^2 - 20x + 25$	

Siendo el dividendo igual al producto del divisor por el cociente, el primer término del dividendo, $4x^4$, es igual al producto del primer término del divisor, $2x^2$, por el primer término del cociente; por tanto, éste será:

$$4x^4 : 2x^2 = 2x^2.$$

Se resta del dividendo el producto de $2x^2$ por el divisor, y se obtiene como primer residuo:

$$-6x^3 - 2x^2 + 35x - 25.$$

El segundo término del cociente se obtiene dividiendo el primer término del residuo, $-6x^3$, entre el primer término del divisor, $2x^2$, o sea:

$$-6x^3 : 2x^2 = -3x.$$

Se resta del primer residuo el producto de $-3x$ por el divisor, y se obtiene como segundo residuo:

$$10x^2 + 20x - 25.$$

Para obtener el tercer término del cociente, se divide el primer término del segundo residuo, $10x^2$, entre el primer término del divisor, $2x^2$, o sea:

$$10x^2 : 2x^2 = 5.$$

Se resta del segundo residuo el producto de 5 por el divisor, y se obtiene un residuo nulo, quedando así terminada la operación.

En casos como éste, se dice que el dividendo es múltiplo del divisor. Cuando hay un residuo, el dividendo no es múltiplo del divisor, es decir, el cociente no está representado por una *expresión entera*, sino por una *expresión mixta* de la forma $C + \frac{R}{d}$, en que d, R y C representan, respectivamente, el divisor, el residuo y la parte entera del cociente.

107. Regla. *Para dividir un polinomio entre otro:*

1º *Ordénense ambos polinomios con respecto a una misma literal.*

2º *Divídase el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, y se obtiene así el primer término del cociente.*

3º *Réstese del dividendo el producto del divisor por el primer término del cociente, y se obtiene así el primer residuo.*

4º *Divídase el primer término de este residuo entre el primer término del divisor, y el cociente que resulta es el segundo término del cociente.*

5º *Procédase de una manera análoga, hasta obtener un residuo nulo o de grado inferior al del divisor.*

108. Aplicaciones. 1º Dividir $x^3 + a^3$ entre $x + a$.

Se tiene:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & & x^2 - ax + a^2 \quad \text{(cociente)} \\
\hline
\text{(divisor)} & x + a & x^3 + a^3 \quad \text{(dividendo)} \\
 & & -x^3 - ax^2 \\
\hline
 & & -ax^2 + a^3 \\
 & & +ax^2 + a^2x \\
\hline
 & & +a^2x + a^3 \\
 & & -a^2x - a^3 \\
\hline
 & & 0
\end{array}
$$

2º Dividir $2x^3 - 8ax^2 + 4a^2x - 10a^3$ entre $x - a$.

Se tiene:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & & 2x^2 - 6ax - 2a^2 \quad \text{(cociente)} \\
\hline
\text{(divisor)} & x - a & 2x^3 - 8ax^2 + 4a^2x - 10a^3 \quad \text{(dividendo)} \\
 & & -2x^3 + 2ax^2 \\
\hline
 & & -6ax^2 + 4a^2x - 10a^3 \\
 & & +6ax^2 - 6a^2x \\
\hline
 & & -2a^2x - 10a^3 \\
 & & +2a^2x - 2a^3 \\
\hline
 & & -12a^3
\end{array}
$$

109. Prueba de la división. Puede hacerse la prueba de la división multiplicando el cociente por el divisor, y añadiendo al producto el residuo, si lo hay; si el resultado es igual al dividendo, la operación está bien hecha.

110. Condición de divisibilidad de dos polinomios. Para que la división de un polinomio entre otro polinomio sea una expresión entera, es necesario (no suficiente) que, después de ordenados el dividendo y el divisor respecto de una misma literal, el primero y el último términos del dividendo sean divisibles, respectivamente, entre el primero y último términos del divisor (v. gr.: el primer ejemplo del Nº 108).

Por tanto, si se realiza la condición indicada, el cociente de la división puede ser una expresión entera, y si no se realiza, dicho cociente es seguramente una expresión mixta.

EJERCICIO 19

Efectuar las operaciones indicadas, o simplificar:

1. $(a^2 - a) : a$.
2. $(a^4 - 3a^3 + 2a^2) : (-a^2)$.
3. $(xy + y^2 - yz) : y$.
4. $(a - 7a^2) : \frac{a}{7}$
5. $(4a^4 - 12a^3 + 4a) : (-4a)$.
6. $(x^4y^3 + x^3y^3 - x^2y^4) : x^2y^3$.
7. $(a^3bc - ab^3c - abc^3) : (-abc)$.
8. $(3a^2b - 3ab^2) : 3ab$.
9. $(x^2yz - xyz^2) : (-xyz)$.
10. $(x^2yz^3 - x^2y^2z^2 - x^3y^2z^2) : x^2yz^2$.
11. $(6a^2 - 9a^5 - 18a^4 + 15a^3 - 36a^6) : (-3a^2)$.
12. $(108x^2y^4 - 81x^5y^3 + 72x^4y^3) : (-9x^2y^3)$.
13. $(36x^4y^5 - 24x^5y^n + 72x^3y^n) : 12x^4y^5$.
14. $(a^m - a^{m+1} + a^{m+3} - a^{2m-4}) : (-a^m)$.
15. $(25a^{2m}b^{2n} + 100a^{3m}b^{3n} - 50a^{4m}b^{3n} - 125a^{3m}b^{4n}) : 25a^{2m}b^{2n}$.
16. $(15a^5b^4c^2 - 45a^7b^2c^4) : 30a^7b^2c^4$.
17. $(2a^3b - 6a^5b^3 + 10a^2b^4) : (-4a^4b^4c^3)$.
18. $(ab + ac - bc) : abc$.
19. $(abc - abd - acd + bcd) : abcd$.
20. $(a^2c^4 - b^2c^4) : a^3b^3c^4$.
21. $4x^2(3x^2y - 5xy^2) : 8x^2y^2$.

Efectuar las operaciones indicadas:

22. $(a^3 - b^3) : (a - b)$.
23. $(a^3 + b^3) : (a + b)$.
24. $(x^3 + y^3) : (x^2 - xy + y^2)$.
25. $(x^4 - y^4) : (x - y)$.
26. $(x^5 - 1) : (x - 1)$.
27. $(x^6 - y^6) : (x^2 - y^2)$.
28. $(x^9 + y^9) : (x^3 + y^3)$.
29. $(x^{12} - y^{12}) : (x^4 - y^4)$.
30. $(x^6 - b^6) : (x^2 - b^2)$.
31. $(x^5 + 1) : (x + 1)$.
32. $(x^7 - x^3) : (x^3 - x)$.
33. $(x^{15} - 1) : (x^5 - 1)$.
34. $(x^7 - 128) : (x - 2)$.
35. $\left(\frac{x^4}{81} - 1\right) : \left(\frac{x}{3} + 1\right)$.
36. $(a^5 - x^5) : (a - x)$.
37. $(9x^6 - 16y^4) : (3x^3 - 4y^3)$.
38. $(625x^8 - 256y^4) : (5x^2 - 4y)$.
39. $(xy + x - y - 1) : (x - 1)$.
40. $(a^3 + ab - a - b) : (a + b)$.
41. $(a^5 - a^2b^3 - a^3 + b^3) : (a^3 - 1)$.
42. $(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) : (x - 1)$.
43. $(x^4 - y^4 - x^2 + y^2) : (x^2 - y^2)$.
44. $(32a^5 - 243y^5) : (2a - 3y)$.
45. $(a^2 + 2ab + b^2 - 1) : (a + b - 1)$.
46. $(a^4 + b^4 + a^2b^2) : (a^2 + b^2 - ab)$.
47. $(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) : (x + y + z)$.
48. $(x^4 - 1 + 2xy - x^2y^2) : (x^2 + 1 - xy)$.
49. $(4abx + b^2x - x - 8ab - 2b^2 + 2) : (x - 2)$.
50. $(8a^2x^2 + 2abx - 6ax - b^2 - 3b) : (2ax + b)$.
51. $(27a^3b - 63a^2b^2 - 3a^5b^4 + 7a^4b^5) : (3a^3b - 7a^4b^2)$.
52. $(10y^2 + 1 - 5y - 10y^3 + 5y^4 - y^5) : (y^2 - 2y + 1)$.

III. DIVISIBILIDAD ENTRE $x \pm a$.

111. Residuo de la división. 1º Sea el polinomio $P(x)$, de cualquier grado, y entero en x, es decir, con exponentes enteros y positivos, que se quiere dividir entre $x - a$.

Siendo el divisor de primer grado, el residuo será independiente de x.

Representando por C y R, respectivamente, el cociente y el residuo, se tiene la identidad:

$$P(x) \equiv (x - a)C(x) + R,$$

y si se reemplaza x por a, resulta:

$$P(a) = (a - a)C(x) + R,$$

o sea:

$$P(a) = R.$$

Por tanto, el residuo de la división se obtiene sustituyendo x por a, en el polinomio dividendo.

2º Cuando el binomio divisor es $x + a$, se puede escribir $x - (-a)$; en este caso el residuo se obtiene sustituyendo, en el polinomio dado, x por $-a$.

El residuo de la división de un polinomio entero en x, *entre un binomio de la forma* $x \pm a$, *se obtiene sustituyendo, en el dividendo,* x *por el simétrico de* a.

112. Aplicaciones. 1º Calcular el residuo de la división de $x^2 + a^2$ entre $x - a$.

Sustituyendo x por a en el dividendo, se obtiene:

$$R = a^2 + a^2 = 2a^2.$$

2º Hallar el residuo de la división de $a^2 + ab - a - b$ entre $a + b$.

Sustituyendo a por $-b$, resulta:

$$R = (-b)^2 + (-b)b - (-b) - b = b^2 - b^2 + b - b = 0.$$

113. Condición de divisibilidad entre $x \pm a$. Si en la fórmula:

$$P(a) = R,$$

el residuo es igual a cero se tendrá:

$$P(a) = 0;$$

en tal caso, el polinomio dividendo es divisible entre $x \pm a$.

Luego *Un polinomio entero en* x *es divisible entre un binomio de la forma* $x \pm a$, *si se anula, al sustituir en él,* x *por el simétrico de* a.

114. Aplicaciones. 1º Averiguar si el polinomio $x^2 - 11x + 18$ es divisible entre $x - 9$.

$$P(9) = 9^2 - 11 \times 9 + 18 = 81 - 99 + 18 = 0.$$

Por tanto, dicho polinomio es divisible entre $x - 9$.

2º Hallar el valor que debe tener a para que $x \pm a$ sea divisor del polinomio $x^2 + 2x + 1$.

Según lo explicado en el Nº 110, los divisores sólo pueden ser $x + 1$ y $x - 1$.

$$P(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 1 = 0.$$
$$P(1) \ = 1^2 + 2 \times 1 + 1 = 4.$$

Por tanto, el polinomio $x^2 + 2x + 1$ tan sólo es divisible entre $x + 1$; de donde, el valor que debe tener a es 1.

115. Divisibilidad de un binomio de la forma $x^n \pm y^n$ entre un binomio de la forma $x \pm y$. Si se aplica la propiedad del residuo a la división de $x^7 \pm y^7$ y $x^8 \pm y^8$ entre $x \pm y$ se tiene:

1º Para el divisor $x + y$:

Dividendo	Divisor	Residuo
$x^7 + y^7$	$x + y$	$-y^7 + y^7 = 0$
$x^7 - y^7$		$-y^7 - y^7 = -2y^7$
$x^8 + y^8$		$+y^8 + y^8 = 2y^8$
$x^8 - y^8$		$+y^8 - y^8 = 0$

De esto se deduce que $x^7 + y^7$ y $x^8 - y^8$ son divisibles entre $x + y$.

2º Para el divisor $x - y$:

Dividendo	Divisor	Residuo
$x^7 + y^7$	$x - y$	$y^7 + y^7 = 2y^7$
$x^7 - y^7$		$y^7 - y^7 = 0$
$x^8 + y^8$		$y^8 + y^8 = 2y^8$
$x^8 - y^8$		$y^8 - y^8 = 0$

De esto se deduce que $x^7 - y^7$ y $x^8 - y^8$ son divisibles entre $x - y$.

Lo anterior puede resumirse diciendo:

$x + y$ divide a $x^n + y^n$ cuando n es impar.
$x + y$ divide a $x^n - y^n$ cuando n es par.
$x - y$ nunca divide a $x^n + y^n$, sea n par o impar.
$x - y$ siempre divide a $x^n - y^n$, sea n par o impar.

116. Cociente de la división de $x^n \pm y^n$ entre $x \pm y$. Sea dividir $x^5 \pm y^5$ y $x^4 \pm y^4$ entre $x \pm y$.

Según lo que se acaba de explicar, de las 8 divisiones indicadas, sólo 4 dan cociente entero, a saber:

$$(x^5 + y^5) : (x + y) = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4.$$
$$(x^4 - y^4) : (x + y) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3.$$
$$(x^5 - y^5) : (x - y) = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4.$$
$$(x^4 - y^4) : (x - y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3.$$

1º *La división de* $x^n \pm y^n$ *entre el binomio* $x - y$, *da siempre términos positivos en el cociente, sea éste una expresión entera o mixta.*

2º *La división de* $x^n \pm y^n$ *entre el binomio* $x + y$, *da términos alternativamente positivos y negativos.*

3º *En cualquiera de los dos casos, el exponente de* x *en el primer término es* $n - 1$ *y va disminuyendo de* 1 *en los siguientes términos; el exponente de* y *es* 0 *en el primer término y va aumentando de* 1 *en los siguientes, hasta ser* $n - 1$ *en el último.*

IV. COCIENTES NOTABLES

117. Su deducción. Los *cocientes notables* provienen de los *productos notables*, y se deducen de ellos por medio de divisiones adecuadas, como se ve a continuación:

I.
$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b} = a + b.$$
$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b} = a - b.$$

II.
$$\frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{a + b} = (a + b)^2.$$
$$\frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{(a + b)^2} = a + b.$$

III.
$$\frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a - b} = (a - b)^2.$$
$$\frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{(a - b)^2} = a - b.$$

$$\text{IV.}\begin{cases}\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=a-b.\\[2ex]\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=a+b.\end{cases}$$

$$\text{V.}\begin{cases}\dfrac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2.\\[2ex]\dfrac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2.\end{cases}$$

$$\text{VI.}\begin{cases}\dfrac{x^2+(a+b)x+ab}{x+a}=x+b.\\[2ex]\dfrac{x^2+(a+b)x+ab}{x+b}=x+a.\end{cases}$$

Nota. — Otros cocientes notables son:

$$\frac{m}{0},\quad \frac{m}{\infty},\quad \frac{0}{m},\quad \frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{m},\ \text{y}\ \frac{\infty}{\infty},$$

de los que se tratará a continuación de los quebrados.

EJERCICIO 20

1. Averiguar si $x-1$ divide x^3-1.
2. „ „ $x-1$ „ x^3+1.
3. „ „ $x-y$ „ x^2-y^2.
4. „ „ $x-y$ „ x^2+y^2.
5. „ „ $x-y$ „ x^5+y^5.
6. „ „ $x-y$ „ x^5-y^5.
7. „ „ $x+y$ „ x^5+y^5.
8. „ „ $x+y$ „ x^5-y^5.
9. „ „ $x+1$ „ x^2+3x+2.
10. „ „ $x-1$ „ x^2+3x+2.
11. „ „ $x-1$ „ x^2-4x+1.
12. „ „ $x-1$ „ x^3-2x^2+2x-1.
13. „ „ $x-2$ „ x^3-8.
14. „ „ $x-1$ „ $x^{12}-1$.

15. Descomponer x^3+y^3 en sus factores.
16. „ x^6-y^6 „ „ „
17. „ x^5-y^5 „ „ „
18. „ x^5+y^5 „ „ „
19. Dense varios binomios divisores de $x^{12}-y^{12}$.
20. Hallar los binomios divisores de m^4-n^4.
21. „ „ „ „ „ a^5-b^5.
22. „ „ „ „ „ $x^{10}-y^{10}$.
23. „ „ „ „ „ $m^{16}-n^{16}$.
24. Decir si $x-2$ es divisor de x^2-4x+3, y por qué.
25. „ „ $x+2$ „ „ „ x^2+4x-3, y por qué.
26. Hallar todos los divisores de x^2-4x+3.
27. „ „ „ „ „ $x^2-7x+10$.
28. „ „ „ „ „ $x^3+7x^2+11x+5$.
29. „ „ „ „ „ a^3-7a+6.
30. „ „ „ „ „ x^3+2x^2-x-2.
31. „ „ „ „ „ $a^4-a^3-7a^2+a+6$.

Hallar el residuo sin efectuar la división.

32. $(a-b):(a+b)$.
33. $(a^2+1):(a-2)$.
34. $(a^3+b^3):(a-b)$.
35. $(x^3-1):(x+1)$.
36. $(x^2+xy-x-y):(x-y)$.
37. $(16a^4-1):(2a+2)$.
38. $(3a^5+2a^4-4a^3+4a^2+5a-2):(a+1)$.
39. $(a^2+2ax+x-1):(a+x+1)$.

Hallar el cociente sin efectuar la división.

40. $(x^3-1):(x-1)$.
41. $(x^3+1):(x+1)$.
42. $(x^4-1):(x-1)$.
43. $(x^4-1):(x+1)$.

44. $(x^5 - y^5) : (x - y)$.
45. $(x^5 + y^5) : (x + y)$.
46. $(a^6 - 1) : (a - 1)$.
47. $(a^6 - 1) : (a + 1)$.
48. $(x^2 - 36) : (x + 6)$.
49. $(4x^4 - 49) : (2x^2 - 7)$.
50. $(25 - 9y^2) : (5 - 3y)$.
51. $(x^2 - 8x + 16) : (x - 4)$.
52. $(64 - 16m^2) : (8 + 4m)$.
53. $(x^2 - 20x + 100) : (x - 10)$.

EJERCICIO 21

(Suplementario).

Indicar, con respecto a x, el grado de cada uno de los polinomios:

1. $11x^7 - 9x^4 + x^0 - 1$.
2. $y^2 - 4x^4y + 4y^5$.
3. $a^m x^n - b^n x^{2n} + x^{2n+2}$.

Dado que $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $x = 5$, calcular el valor de las siguientes expresiones:

4. $\frac{a^2 + b^3}{c^4}$.
5. $\frac{a^5 - b}{c^2}$.
6. $(a + b + c)^2 - (a + b)2$.
7. $2a - bc + c + 3$.
8. $3a^2 - 4b + 5c^3 + 1$.
9. $4(x - 1)^2 - 8a + (x - 1)^3$.
10. $a^3x^3 - 3a^2x + 3ax - 1$.
11. $(x^2 + a^2)(x^2 - a^2) - 4$.
12. $(a + x)x + (x - a)a - ax$.

Sabiendo que

$$A = a^2 + 2ab + b^2, \qquad C = -a^2 + 2ab - b^2,$$
$$B = a^2 - 2ab + b^2, \qquad D = 2ab - 2a^2 - 2b^2,$$

formar los siguientes polinomios:

13. $5A - 4B - 3C + 2D$.
14. $4(A - B) - 3(D - C)$.
15. $2A - 3B + 2C - 3D$.
16. $3(A + D) + 2(A - C) + 3(C - B)$.

Efectuar las siguientes operaciones y reducir:

17. $(5a^3 - 7a^2b^2 + 9ab^3 - b^4 + 1) + (7a^2b^2 - 4a^3b + 2b^4 - 8ab^3 + 6)$.
18. $(a^2 + 2ax + x^2) + (a^2 - 2ax + x^2) - 2(a^2 + x^2) + 12ax + (a^2 - 4ax + 4x^2) - (a^2 + 4ax + 4x^2)$.
19. $(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) - (x^5 + x^4 + x^2 + 1) - (x^3 + x - x^5)$.

20. $a^2 \times b^3 \times c^3 \times a^2b^2c^2 \times abc$.
21. $-(a + b)^2 \times (a + b) \times (a + b)^3$.
22. $-(a - 1) \times (a - 1)^2 \times (a - 1)^5$.
23. $3(a + b)^2 \times 5[-(a - b)^2]$.
24. $(-3a^4b^2c)^3$.
25. $(-3a^2b^5c^4d^3f)^5$.
26. $(\frac{2}{5}a^3b^2c)^4$.
27. $(-2a^3)^{10}$.
28. $(-3a^2)^3(-2a^2)^3$.
29. $(-2a^2b^3c^4)^2(-2a^2b^3c^4)^4$.
30. $(-\frac{2}{3}a^4b^4c^2)^3(-2a^2b^3c^4)^2$.
31. $(-a)(-a^2)(-a^3)(-a^4)(-a^5)$.
32. $(-ab)^2(-ab)^4(-ab)^6$.
33. $a^2(-a^2)a^3(-a^4)(-a^5)a^6$.
34. $x^3(-x^5)(-x)(-x^2)x^4$.
35. $(x^4 + y^4 - x^2y^2)(x^2 - y^2 + xy)$.
36. $(-6x^2y - xy^2 + 5y^3)(2xy - y^2)$.
37. $(3x^3 - 6x^2y - xy^2 + 5y^3)(-2x^2 + 2xy - y^2)$.

Desarrollar, empleando, cuando se pueda, las fórmulas estudiadas.

38. $(a - b + c)^2$.
39. $(2a^2 - 3b^2 + 4c^4)^2$.
40. $(ma - nb - pc)^2$.
41. $(x + 1)^2 - (x - 1)^2$.
42. $(4a^2x^3y^4 - 2ax^2y^3)^2$.
43. $(a^2 + b^2)a^2(a^2 - b^2)b^2$.
44. $(a - b)^2(a + b)^2$.
45. $(a - 7b)^3$.
46. $(4x^3 + 1)^3$.
47. $(9a^4 - 5a^2)^3$.
48. $(x^6 - x^3 + 1)^3$.
49. $(a + b)^4$.
50. $(a - b)^4$.
51. $(a + 1)^4$.
52. $(x^2 - 1)^4$.
53. $(x + 3)^4$.

Obtener el producto, sin efectuar la multiplicación.

54. $(a + 8)(a + 3)$.
55. $(x - 6)(x - 1)$.
56. $(4a - 5)(4a + 2)$.
57. $(5x + 5)(5x + 2)$.
58. $(2a - b)(2a - c)$.
59. $(ax + 6)(ax + 7)$.
60. $(ax - 3)(ax + 5)$.
61. $(2x + a + 5)(2x + a - 5)$.
62. $(3b + c + 8)(3b + c - 8)$.
63. $(x^2 + ab + c^2)(x^2 - ab + c^2)$.
64. $(x^2y^2 - 5 + 4y^2)(x^2y^2 + 5 - 4y^2)$.

Efectuar las siguientes operaciones o simplificar los cocientes:

65. $(a^5b^4 - a^4b^5) : (-a^4b^4)$.

66. $(6a^2 - 12a^3 + 24a^5) : 48a^4$.

67. $(a^5b^5 - a^4b^4 + a^3b^3) : (-4a^4b^4)$.

68. $(2^2 \times 3^4 - 4^3 \times 3^4) : (-2^2 \times 3^4 \times 4^3)$.

69. $5 \times 4^2(3 \times 4^2 \times a - 4a^2) : (8 \times 4^3 \times a^2)$.

70. $(x^{m+n} - x^{n+p}) : x^{m+n+p}$.

71. $(x^{2m+1} + x^{2n-4}) : x^{2m-n}$.

72. $(256x^5 - 972y^5) : (2x - 3y)$.

73. $(10a^6bc + 20a^5b^5c - 4a^5b - 8b^5) : (5a^5bc - 2b)$.

74. $(x^3 - ax^2 - abx - ab^2 - b^3) : (x - a - b)$.

75. $(x^6 - x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 2) : (x^3 - x^2 + x - 1)$.

76. $(2x^4 + 11x^3 - 26x^2 + 16x - 3) : (x^2 + 7x - 3)$.

Hallar el residuo sin efectuar las divisiones.

77. $(x^4 - 8x^2 - 9) : (x - 2)$.

78. $(3x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5x - 2) : (x + 1)$.

79. $(x^5 - 3bx^4 + 5b^2x^3 - 8b^3x^2 + 6b^4x - 4b^5) : (x - 2b)$.

Hallar los cocientes, sin efectuar las divisiones.

80. $(a^4 - b^4) : (a + b)$.

81. $(a^6 - 1) : (a + 1)$.

82. $(a^6 - b^6) : (a - b)$.

8

FACTORIZACION

I. PROCEDIMIENTOS SENCILLOS DE FACTORIZACION

118. Definición. Dados dos o más factores, se obtiene su producto multiplicándolos. Inversamente, dado un producto, se pueden obtener sus factores; a esta operación se la llama *factorización*.

Factorizar una expresión algebraica es hallar dos o más factores cuyo producto es igual a la expresión propuesta.

119. Factorizar un polinomio cuyos términos tienen un factor común. Por la ley distributiva de la multiplicación, se tiene:

$$m(x - y + z) = mx - my + mz.$$

Para factorizar este último polinomio basta, pues, proceder a la inversa, y escribir:

$$\boldsymbol{mx - my + mz = m(x - y + z)}.$$

De esto se deduce que: *Para factorizar un polinomio, cuyos términos tienen un monomio factor común, se divide el polinomio entre ese factor común, y se indica el producto del divisor por el cociente obtenido.*

120. Aplicaciones. Factorizar el binomio $3a^2 - 6ab$ y el trinomio $5a^2bx^4 - 15ab^2x^3 - 20ab^3x^4$.

1º Poniendo $3a$ en factor común en la primera expresión se tiene:

$$3a^2 - 6ab = 3a(a - 2b).$$

2º Poniendo $5abx^3$ en factor común en el trinomio, resulta:

$$5a^2bx^4 - 15ab^2x^3 - 20ab^3x^4 = 5abx^3(ax - 3b - 4b^2x).$$

121. Observación. En la práctica se elige, como factor común, un monomio tal que facilite operaciones subsecuentes, como se verá más tarde en la simplificación de fracciones.

Para ello conviene generalmente elegir el *máximo común divisor* (m. c. d.) de los términos del polinomio.

Para obtener dicho máximo común divisor, se calcula el de los coeficientes numéricos de los términos del polinomio, de acuerdo con lo explicado en Aritmética, y se escriben a continuación de él las literales comunes a todos los términos con su menor exponente.

Así, el m. c. d. del polinomio $72x^2y^3 + 60x^4y^2 - 84x^5y^4$ es $12x^2y^2$.

122. Factorizar un trinomio cuadrado perfecto. Por multiplicación se obtiene:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

Luego, se tendrá inversamente:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$$

Por tanto: *Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto, se extrae la raíz cuadrada de los términos cuadráticos y se indica la elevación al cuadrado del binomio formado por esas raíces, separadas por el signo del término que es su doble producto.*

123. Factorizar un polinomio cubo perfecto. Procediendo de una manera análoga a la que se ha seguido en la factorización de un trinomio cuadrado perfecto, se obtiene:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3.$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

124. Aplicaciones. **Factorizar las expresiones siguientes:**

$36x^2 + 24xy + 4y^2 = (6x)^2 + 2(6x \times 2y) + (2y)^2 = (6x + 2y)^2.$
$9a^2 - 24ab + 16b^2 = (3a)^2 - 2(3a \times 4b) + (4b)^2 = (3a - 4b)^2.$
$27c^3 - 54c^2d + 36cd^2 - 8d^3$
$= (3c)^3 - 3(3c)^2\,2d + 3 \times 3c(2d)^2 - (2d)^3 = (3c - 2d)^3.$

EJERCICIO 22

En las expresiones siguientes, poner en factor común el *m. c. d.*

1. $a^2 + a$.
2. $a - ab$.
3. $6a^3 - 12a^2b - 24a^4$.
4. $25a^3 + 35a^4 - 45a^5$.
5. $a^2b^2 - 2a^3b$.
6. $460a^2x^5y^4 - 130a^4x^5y^3$.

7. $2x - 5x^2$.
8. $a^4 + a^3 - a^2$.
9. $152x^3 - 38x$.
10. $(5ax^3)^5 - (5ax^3)^4$.
11. $18x^5y^4z^3 + 30x^4y^3z^5$.
12. $84a^5b^4 - 108a^4b^5 + 420a^6b^3$.

Expresar los siguientes polinomios bajo forma de cuadrados o cubos de binomios:

13. $x^2 + 2xy + y^2$.
14. $a^2 + 8a + 16$.
15. $9a^2 + 49b^2 + 42ab$.
16. $25 + a^2 - 10a$.
17. $100x^4 + 9y^2 - 60x^2y$.
18. $-20xy + 4x^2 + 25y^2$.
19. $a^2 + 36b^2c^2 + 12a^2bc$.
20. $132abc + 121a^2b^2 + 36c^2$.
21. $4a^2b^2 + 25x^2y^2 - 20abxy$.
22. $49m^4n^2 + 64u^6v^2 + 112m^2nu^3v$.
23. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
24. $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$.
25. $27a^6b^3 - 54a^4b^2 + 36a^2b - 8$.
26. $125x^3y^6 + 225x^2y^4z + 135xy^2z^2 + 27z^3$.

II. FACTORIZAR UN BINOMIO DE LA FORMA $x^n \pm y^n$.

125. Factorización de la diferencia de dos cuadrados. Por multiplicación se obtiene:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Inversamente, se puede escribir:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

La diferencia de dos cuadrados es igual al producto de dos binomios conjugados, formados por las raíces cuadradas de los términos.

126. Aplicaciones. Factorizar:

$9a^2 - 16b^2 = (3a)^2 - (4b)^2 = (3a + 4b)(3a - 4b).$
$(a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c).$
$(7x + 3)^2 - (5x - 4)^2 = (7x + 3 + 5x - 4)(7x + 3 - 5x + 4)$
$= (12x - 1)(2x + 7).$

127. Observación. Hay polinomios que pueden tomar la forma de diferencia de cuadrados, ya sea agrupando debidamen-

te sus términos, ya sea agregándoles y restándoles un mismo término; v. gr.:

$$a^2 + 2ax + x^2 - 4b^2 = (a + x)^2 - (2b)^2$$
$$= (a + x + 2b)(a + x - 2b).$$
$$9x^4 + 11x^2 + 4 = 9x^4 + 12x^2 + 4 - x^2 = (3x^2 + 2)^2 - x^2$$
$$= (3x^2 + 2 + x)(3x^2 + 2 - x).$$

En el segundo ejemplo, se ha agregado x^2 con el objeto de convertir el trinomio en cuadrado perfecto, y se ha restado el mismo término para que la expresión no cambie de valor.

128. Factorizar la suma de dos cubos. De la igualdad ya obtenida:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3,$$

se deduce inversamente:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

La suma de los cubos de dos términos puede factorizarse indicando el producto de dos factores, uno de los cuales es la suma de las raíces cúbicas de esos términos, y el otro es la suma de sus cuadrados, disminuída del producto de esos dos términos.

129. Aplicaciones. Factorizar:

$$27x^3 + 8y^3 = (3x)^3 + (2y)^3 = (3x + 2y)(9x^2 - 3x \times 2y + 4y^2)$$
$$= (3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2).$$
$$8a^3 + 64b^3 = (2a)^3 + (4b)^3 = (2a + 4b)(4a^2 - 2a \times 4b + 16b^2)$$
$$= (2a + 4b)(4a^2 - 8ab + 16b^2).$$

130. Factorización de la diferencia de dos cubos. Al igual que para la suma de dos cubos, de la igualdad:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3,$$

se obtiene inversamente:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

La diferencia de los cubos de dos términos puede factorizarse indicando el producto de dos factores, uno de los cuales es la diferencia de las raíces cúbicas de esos dos téminos, y el otro es la suma de sus cuadrados aumentada del producto de las raíces de los dos términos.

131. Aplicaciones. — Factorizar:

$$125a^3 - b^3c^3 = (5a)^3 - (bc)^3 = (5a - bc)(25a^2 + 5a \times bc + b^2c^2)$$
$$= (5a - bc)(25a^2 + 5abc + b^2c^2).$$
$$x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4).$$

132. Factorizar un binomio de la forma $x^n \pm y^n$. Sea factorizar el binomio $x^5 + y^5$.

Sus divisores, de la forma $x \pm y$, sólo pueden ser $x + y$, y $x - y$. Al ensayarlos sucesivamente, aplicando la propiedad del residuo de la división (N° 111), se obtiene:

$$P(-y) = -y^5 + y^5 = 0.$$
$$P(y) = y^5 + y^5 = 2y^5.$$

Por tanto, $x^5 + y^5$ es divisible entre $x + y$, pero no entre $x - y$.

Al efectuar la división, se halla el otro factor del binomio propuesto, o sea:

$$(x^5 + y^5) : (x + y) = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4.$$

Luego:

$$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4).$$

Para factorizar un binomio de la forma $x^n \pm y^n$, hay que examinar qué binomio de la forma $x \pm y$ lo divide exactamente, y multiplicar este divisor por el cociente de la división.

Cuando el binomio es $x^n - y^n$, y n es par, es preferible considerar dicho binomio como una diferencia de cuadrados.

133. Aplicaciones. Factorizar:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$
$$x^7 - y^7 = (x - y)(x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6).$$
$$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b).$$

EJERCICIO 23

Factorizar las expresiones siguientes:

1. $a^2 - 1$.
2. $81u^2 - 1$.
3. $4a^2 - 25$.
4. $49x^4 - 16y^2$.
5. $64a^4 - 36x^4$.
6. $(x + 3y)^2 - 4z^2$.

7. $a^2b^2-(c+d)^2$.
8. $9a^2+c^2+6ac-4x^2$.
9. $x^2-6ax+9a^2-16b^2$.
10. $c^2-x^2-y^2+2xy$.
11. $16x^4+7x^2+1$.
12. $25a^4b^4+14a^2b^2+9$.
13. $x^4+y^4-6x^2y^2$.
14. $\frac{c^2}{16}-36$.
15. $\frac{m^2}{9}-\frac{n^2}{25}$.
16. $16a^2b^2-(x^2-a)^2$.
17. $x^2-a^2+2ab-b^2$.
18. $4-n^2-p^2-2np$.
19. $4x^2+y^2-4xy-25$.
20. $x^2+9y^2-(a-b)^2-6xy$.
21. x^3+1.
22. x^3-1.
23. a^3+8b^3.
24. a^2b^3+64.
25. $125x^3-27$.
26. $x^3y^3-z^3$.
27. $64x^9+y^3$.
28. $125+27a^3v^9$.
29. $16+54n^3$.
30. $27n^3-8m^6$.
31. $4c^5-32b^3c^2$.
32. $16-54s^3$.
33. x^6+1.
34. x^5-y^5.
35. x^4-y^4.
36. x^5+y^5.
37. a^7-b^7.
38. a^7+b^7.
39. m^8-n^8.
40. m^9+n^9.

III. FACTORIZACION POR AGRUPACION Y POR EVALUACION

134. Factorización por agrupación. Sea el polinomio

$$ac+ad+bc+bd,$$

que se supone provenir del producto de dos factores binomios.

Agrupando los términos de dos en dos, de manera que cada grupo tenga un factor común, se puede escribir:

$$(ac+ad)+(bc+bd).$$

Como se ve, el primer grupo es divisible entre a, y el segundo lo es entre b; resulta por tanto:

$$(ac+ad)+(bc+bd)=a(c+d)+b(c+d).$$

Poniendo el binomio $c+d$ en factor común, se tiene:

$$ac+ad+bc+bd=(a+b)(c+d).$$

Para factorizar un polinomio de cuatro términos, que se supone provenir de la multiplicación de dos factores binomios:

1º *Agrúpense convenientemente los cuatro términos en dos binomios tales que cada uno admita un factor común.*

2º *Indíquese, en cada grupo, el producto del factor común por su binomio correspondiente, el cual resultará el mismo en todos ellos, si efectivamente el polinomio dado proviene del producto de dos factores binomios.*

3º *Indíquese el producto del binomio común por la suma algebraica de los otros factores diferentes.*

Nota. — Pudo haberse agrupado los términos de este otro modo:

$$(ac+bc)+(ad+bd).$$

135. Aplicaciones. Factorizar como producto de dos factores:

$$20ac+15bc+4ad+3bd \quad \text{y} \quad 18a^3+12a^2-15a-10.$$

1º $20ac+15bc+4ad+3bd=(20ac+4ad)+(15bc+3bd)$
$=4a(5c+d)+3b(5c+d)$
$=(4a+3b)(5c+d).$

Nota. — Hubiera podido agruparse los términos así:

$$(20ac+15bc)+(4ad+3bd).$$

2º $18a^3+12a^2-15a-10=(18a^3+12a^2)-(15a+10)$
$=6a^2(3a+2)-5(3a+2)$
$=(6a^2-5)(3a+2).$

136. Factorización por evaluación. Sea el polinomio

$$x^3+3x^2-x-3,$$

que se supone resulta de multiplicar entre sí varios factores binomios de la forma $x\pm a$, $x\pm b$, $x\pm c$, etc.

Los valores que se pueden atribuir a los segundos términos de los binomios divisores, son ± 1 y ± 3, pues estos números son los únicos que dividen exactamente el último término del polinomio propuesto.

Ensayando los diferentes divisores posibles: $x+1$, $x-1$, $x+3$ y $x-3$, se tiene:

$P(-1)=-1+3+1-3=0,$
$P(1)=1+3-1-3=0,$
$P(-3)=-27+27+3-3=0,$
$P(3)=27+27-3-3=48.$

De donde se deduce que el polinomio es divisible entre $x+1$, $x-1$, y $x+3$, pero no lo es entre $x-3$; por consiguiente:

$$x^3+3x^2-x-3=(x+1)(x-1)(x+3).$$

Para factorizar un polinomio que se supone resulta de multiplicar entre sí varios binomios de la forma x ± a, x ± b, x ± c, *etc., se buscan sus divisores, aplicando la propiedad del residuo de la división, y se indica el producto de todos los factores así hallados.*

137. **Aplicación.** Factorizar el polinomio:

$$x^3-10x^2+23x-14.$$

Los divisores de -14 son: ± 1, ± 2, ± 7 y ± 14.

Los divisores binomios que hay que comprobar son:

$x+1$, $x-1$, $x+2$, $x-2$, $x+7$, $x-7$, $x+14$, $x-14$.

$$\begin{aligned}
P(-1) &= -1-10-23-14 &&= -48,\\
P(1) &= 1-10+23-14 &&= 0,\\
P(-2) &= -8-40-46-14 &&= -108,\\
P(2) &= 8-40+46-14 &&= 0,\\
P(-7) &= -343-490-161-14 &&= -1\,008,\\
P(7) &= 343-490+161-14 &&= 0,\\
P(-14) &= -2\,744-1\,960-322-14 &&= -5\,040,\\
P(14) &= 2\,744-1\,960+322-14 &&= 1\,092.
\end{aligned}$$

La factorización es, pues, como sigue:

$$x^3-10x^2+23x-14=(x-1)(x-2)(x-7).$$

EJERCICIO 24

Factorícense las expresiones siguientes:

1. $ac-ad-bc+bd.$
2. $4x^3-5x^2-4x+5.$
3. $2+3x-8x^2-12x^3.$
4. $ay^2+ax^2-by^3-bx^3.$
5. $a^4-a^3b+ab^3-b^4.$
6. $a^2bc-ac^2d+ab^2d-bcd^2.$
7. $28-16a+14a^2-8a^3.$
8. $3ax-ay-9bx+3by.$
9. $x^3y^3+ab^2x^3y+a^2bxy^3+a^2b^3.$
10. $18x^3+12a^2-15a-10.$
11. $15x^3-12x^2+35x-28.$
12. $2a^3-3a^2-4a+6.$

13. $9x^3-x^2-9x+1.$
14. $abx+3x-10ab-30.$
15. $b^3+b^2+b+1.$
16. $x^3-12-4x+3x^2.$
17. $a^3+a-2.$
18. $a^2+4a-5.$
19. $x^2+3x+2.$
20. $x^3-7x+6.$
21. $a^3+2a^2-a-2.$
22. $x^3-2x^2-x+2.$
23. $x^3-3x^2-x+3.$
24. $a^3-a^2-5a+6.$
25. $x^3+3x^2-4x-12.$
26. $x^4-x^3-19x^2-11x+30.$
27. $x^4-15x^2-10x+24.$
28. $a^4-a^3-7a^2+a+6.$

IV. FACTORIZACION DE UN TRINOMIO DE LA FORMA x^2+mx+n, o ax^2+mx+n.

138. **Factorizar** un trinomio de la forma x^2+mx+n. Teniendo presente que el producto de dos binomios, tales como $(x+a)(x+b)$, es (Nº 89):

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab,$$

si se reemplaza $a+b$ por m y ab por n, se puede escribir:

$$x^2+mx+n=(x+a)(x+b).$$

Un trinomio de la forma x^2+mx+n, *proviene del producto de dos binomios cuyo primer término es* x, *y los segundos términos son tales que dan por suma el coeficiente de* x, *y por producto el término independiente de* x.

139. **Aplicaciones.** 1º Sea $x^2+7x+12$.

El producto $+12$ indica que los factores son de mismo signo, y la suma $+7$ indica que los dos son positivos.

El producto 12, con factores enteros, puede obtenerse multiplicando 12 por 1, ó 6 por 2, ó 4 por 3. Los dos últimos factores son los buscados, pues su suma es $4+3=7$.

Se tiene, por consiguiente, que:

$$x^2+7x+12=(x+4)(x+3).$$

2º Sea también $x^2-5x-14$. El producto -14 indica que los dos factores son de signo contrario, y, puesto que su suma es negativa, el mayor en valor absoluto debe ser negativo.

El producto -14, con factores enteros, puede obtenerse multiplicando -14 por 1, ó -7 por 2. La suma de estos dos últimos fac-

tores da -5; por consiguiente, los números buscados son -7 y 2.

Por lo tanto: $x^2-5x-14=(x-7)(x+2)$.

140. Factorizar un trinomio de la forma ax^2+mx+n. Los trinomios de la forma ax^2+mx+n, provienen de la multiplicación de dos binomios, como se ve en los ejemplos que siguen:

$3x+5$	$3x+5$
$2x+2$	$2x-2$
$6x^2+10x$	$6x^2+10x$
$+\ 6x+10$	$-\ 6x-10$
$6x^2+16x+10$	$6x^2+\ 4x-10$

Examinando los productos anteriores, se observa que:

1º El primer término del trinomio es igual al producto de los primeros términos de cada factor.

2º El segundo término es igual a la suma algebraica de los productos del primer término de cada binomio por el segundo término del otro.

3º El tercer término es igual al producto de los segundos términos de los dos binomios.

Un trinomio de la forma ax^2+mx+n *puede presentarse en forma de dos factores binomios tales que el producto de los dos primeros términos sea* ax^2, *la suma algebraica de los productos del primer término de cada uno por el segundo término del otro dé* mx, *y el producto de los segundos términos sea* n.

141. Aplicaciones. 1º Factorizar $5x^2+16x+3$.

El primer término $5x^2$ es el producto de $5x$ por x; por lo tanto, los primeros términos de los binomios son $5x$ y x.

Como el producto de los números que constituyen los segundos términos de los binomios es $+3$, deben ser de mismo signo, es decir, los factores de 3 pueden ser 3 y 1 ó -3 y -1. Los factores -3 y -1 deben desecharse, porque su producto, por los primeros términos daría el coeficiente de x negativo. Quedan por examinar 3 y 1.

Resulta entonces que los binomios pueden ser $5x+3$ y $x+1$ ó $5x+1$ y $x+3$.

Por multiplicación, se ve que los factores son $5x+1$ y $x+3$.

Por tanto: $5x^2+16x+3=(5x+1)(x+3)$.

2º Factorizar $6x^2-x-15$.

El primer término $6x^2$ puede provenir de multiplicar $3x$ por $2x$, o bien $6x$ por x.

El primer supuesto da, como primeros términos de los binomios, $3x$ y $2x$.

El término -15 del polinomio indica que los segundos términos de los binomios son de signo contrario, y el coeficiente de x del mismo polinomio requiere que el mayor, en valor absoluto, sea negativo; por tanto, dichos segundos términos pueden ser -15 y $+1$, ó -5 y $+3$.

Desde luego, se ve que hay que desechar el primer par de valores, pues el término en x del trinomio propuesto tendría un coeficiente diferente de -1.

Quedan por examinar los pares de binomios:

$$3x-5 \text{ y } 2x+3, \qquad 3x+3 \text{ y } 2x-5.$$

Por multiplicación, se ve que los factores son $3x-5$ y $2x+3$, pues con ellos se obtiene, para término medio del trinomio propuesto:

$$9x-10x=-x.$$

Por tanto: $6x^2-x-15=(3x-5)(2x+3)$.

Si la factorización buscada no se hubiera hallado, habría habido necesidad de ensayar otros factores, como:

$$6x-15 \text{ y } x+1, \text{ ó } 6x-5 \text{ y } x+3, \text{ etc.}$$

142. Otro procedimiento. El procedimiento que se acaba de exponer para factorizar un trinomio de la forma ax^2+mx+n, resulta a veces un tanto largo, por el ensayo que debe hacerse de los diferentes pares de binomios. Puede seguirse otro más corto, que se indica a continuación, aunque sin demostrarlo, pero de cuyo resultado se da la comprobación.

Para factorizar un trinomio de la forma ax^2+mx+n, *búsquense dos números cuya suma algebraica sea igual al coeficiente de* x, *y su producto sea igual al coeficiente de* x^2 *multiplicado por el término independiente.*

Una vez hallados los dos números, sustitúyase el término mx ***por dos términos en*** x ***cuyos coeficientes sean dichos números, y póngase luego en factor, agrupando los términos.***

143. Aplicaciones. 1º Factorizar el trinomio $3x^2 + 14x + 8$.

Hay que buscar dos términos cuya suma sea 14, y su producto, $8 \times 3 = 24$.

El producto 24 puede resultar de 24×1, 12×2, 8×3, ó 6×4.

Los únicos factores cuya suma da 14, son 12 y 2; éstos son pues los números buscados, y se puede escribir:

$$3x^2 + 14x + 8 = 3x^2 + 12x + 2x + 8 = 3x(x + 4) + 2(x + 4).$$

Poniendo el binomio $x + 4$ en factor común, resulta:

$$3x^2 + 14x + 8 = (x + 4)(3x + 2).$$

COMPROBACIÓN:

$$(x + 4)(3x + 2) = 3x^2 + 12x + 2x + 8 = 3x^2 + 14x + 8.$$

2º Factorizar el trinomio: $6x^2 - 13x - 5$.

Deben buscarse dos números cuya suma sea -13, y su producto, $6(-5) = -30$.

El producto -30 puede resultar de -30×1, -15×2, -6×5, ó -10×3.

Los únicos factores cuya suma es -13, son -15 y 2; luego:

$$6x^2 - 13x - 5 = 6x^2 - 15x + 2x - 5 = 3x(2x - 5) + (2x - 5),$$

$$6x^2 - 13x - 5 = (2x - 5)(3x + 1).$$

COMPROBACIÓN:

$$(2x - 5)(3x + 1) = 6x^2 - 15x + 2x - 5 = 6x^2 - 13x - 5.$$

EJERCICIO 25

Factorizar los trinomios siguientes:

1. $a^2 + 3a + 2$.
2. $x^2 - 11x + 30$.
3. $a^2 - 7a + 12$.
4. $x^2 - 15x + 56$.
5. $x^2 - 19x + 90$.
6. $x^2 + x - 2$.
7. $x^2 - 2x - 3$.
8. $x^2 - 4x - 12$.
9. $x^2 - x - 20$.
10. $a^2 - 4a - 21$.
11. $2a^2 + 7a + 3$.
12. $5y^2 - 8y + 3$.
13. $3x^2 + 4x - 4$.
14. $4x^2 + 13x + 3$.
15. $6a^2b^2 + 17abc + 12c^2$.
16. $6a^2 + 17a + 12$.
17. $2a^2 + 5ab + 2b^2$.
18. $6x^2 - 31x + 35$.
19. $3x^2 + 19x - 14$.
20. $4x^2 + x - 14$.

EJERCICIO 26

(Suplementario).

Factorizar las expresiones siguientes:

1. $a^2c^2 - b^2$.
2. $a^2 + 4a + 4$.
3. $a^2 - 5a + 6$.
4. $4a^2 - b^2$.
5. $x^4 - 25$.
6. $-2ab + a^2 + b^2$.
7. $(x + y)^2 - z^2$.
8. $x^2 - 13x + 30$.
9. $x^2 + 13x + 30$.
10. $1 + 6a + 9a^2$.
11. $a^3 + b^3$.
12. $1 - a^3$.
13. $x^3 + 1$.
14. $x^2 - 15x + 36$.
15. $x^2 + 2xy + y^2 - a^4$.
16. $(a - 1)^2 - x^2$.
17. $ac - ax - 4bc + 4bx$.
18. $5cx - 10c + 4dx - 8d$.
19. $2ca - cb + 6a - 3b$.
20. $3x^2 + 27x + 42$.
21. $4x^3 - 7ax^2 - 4y^2 + 7ay^2$.
22. $18 - 27a + 16b - 24ab$.
23. $125 - x^3$.
24. $125 + x^3$.
25. $a^2 + 4b^2 + 4ab - 4x^2$.
26. $5a^3 + 10a^2b^3 + 30a^3b^4$.
27. $a^4 - 7a^2 - 120$.
28. $8xy + 27xy^7$.
29. $16 + 16xy + 4x^2y^2$.
30. $65a^2 + 8a - 1$.
31. $a^4 + 27a^2 + 180$.
32. $a^4 - 3a^2 - 180$.
33. $ac + bc + ad + bd$.
34. $625 - (31 - 4a^2)^2$.
35. $60a^2 + 7ab - b^2$.
36. $100 - (16x^2 + y^6 - 8xy^3)$.
37. $x^3 - 2x^2 + x - 2$.
38. $x^3 + 2x^2 - x - 2$.
39. $x^2 + 2x + 5x + 10$.
40. $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy - 4xz + 6yz$.
41. $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - 2a^2bc + 2ab^2c - 2abc^2$.
42. $a^6 + 10a^3 + 9a^2 + 25 - 6a^4 - 30a$.

9

FRACCIONES ALGEBRAICAS

I. PRELIMINARES

144. Definiciones. *Se llama* **fracción** *o* **quebrado** *el cociente indicado de dos expresiones algebraicas cualesquiera;* así, la expresión $\frac{a}{b}$ es una fracción algebraica, y se lee a entre b.

El dividendo se llama *numerador*, y el divisor, *denominador*. El numerador y el denominador se llaman también *términos* del quebrado.

Lo mismo que en Aritmética, el denominador indica en cuántas partes iguales ha sido dividida la unidad (siempre que se trate de números concretos), y el numerador indica cuántas partes se toman.

145. Principio fundamental. Sea la fracción algebraica $\frac{a}{b}$.

Llamando c su valor, se tiene: $\frac{a}{b} = c$.

Como el dividendo es igual al cociente multiplicado por el divisor, se puede escribir:

$$a = cb.$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por m, resulta:

$$am = cbm.$$

Considerando am como dividendo, bm como divisor y c como cociente, se obtiene:

$$\frac{am}{bm} = c, \quad \text{o sea:} \quad \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

De igual modo se demostraría que:

$$\frac{a:m}{b:m} = c, \quad \text{o sea:} \quad \frac{a:m}{b:m} = \frac{a}{b}.$$

Pueden multiplicarse por un mismo factor, o dividirse entre un mismo divisor, los dos términos de una fracción, sin que se altere su valor.

146. Fracciones equivalentes. Aplicando el principio anterior, se cambia la forma de las fracciones, pero no su valor, es decir, que las fracciones resultantes son equivalentes a las propuestas, aunque difieran los términos; así se tiene:

$$\frac{4a^2b}{6ab^2} = \frac{4a^2b : 2ab}{6ab^2 : 2ab} = \frac{2a}{3b}.$$

147. Signos de las fracciones. Recordando la regla de los signos de la división, se puede escribir:

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}.$$

Se pueden cambiar los signos de ambos términos de una fracción, sin que se altere su valor, pero si se cambia el de un solo término, la fracción cambia de signo.

148. Observaciones. 1ª Si el numerador o el denominador de un quebrado es un polinomio, para cambiar su signo, se debe cambiar el de cada uno de los términos del polinomio; v. gr.:

$$\frac{m-n}{r-s} = -\frac{n-m}{r-s} = -\frac{m-n}{s-r} = \frac{n-m}{s-r}.$$

2ª Si el numerador o el denominador, o ambos, se componen de varios factores, puede cambiarse el signo de un número par de ellos, cualquiera que sea el término a que pertenezcan, sin que cambie el signo del quebrado, v. gr.:

$$\frac{a-b}{(m-n)(r-s)} = \frac{a-b}{(n-m)(s-r)} = \frac{b-a}{(m-n)(s-r)} = \frac{b-a}{(n-m)(r-s)}.$$

Pero, si se cambia el signo de un número impar de factores, el quebrado cambia de signo; v. gr.:

$$\frac{a-b}{(m-n)(r-s)} = -\frac{a-b}{(n-m)(r-s)} = -\frac{a-b}{(m-n)(s-r)} = -\frac{b-a}{(n-m)(s-r)}.$$

EJERCICIO 27

Expresar los quebrados siguientes de tres maneras distintas, sin alterar su valor, mediante cambios de signos.

1. $\frac{-x}{y}$.
2. $\frac{m}{-n}$.
3. $\frac{a}{cb}$.
4. $\frac{3x}{r-r^2}$.
5. $\frac{m}{v-z}$.
6. $\frac{m-n}{2x}$.

7. $\frac{a+b}{r-s}$.

8. $\frac{c-e}{y-z}$.

9. $\frac{b-a}{m+n-r}$.

10. $\frac{(m-n)(r-s)}{(x-y)(y-z)}$.

Decir, en cada caso, cómo se ha pasado del primer quebrado al segundo.

11. $\frac{4a}{5b} = \frac{20a}{25b}$.

12. $\frac{12}{17} = \frac{36a^2}{51a^2}$.

13. $\frac{5a}{7c} = \frac{5ab}{7cb}$.

14. $\frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$.

15. $\frac{5r}{9r} = \frac{5}{9}$.

16. $\frac{35mt}{45t} = \frac{7m}{9}$.

17. $\frac{8yt^2}{16y^2t^2} = \frac{1}{2yt}$.

18. $\frac{7}{s-5} = \frac{14}{2(s-5)}$.

19. $\frac{a-3b}{7} = \frac{5u(a-3b)}{35u}$.

20. $\frac{2a^4b^3-a^2b^3}{a^2b^4+a^4b^4} = \frac{a(2a-1)}{b(a^2+1)}$.

II. SIMPLIFICACION DE QUEBRADOS

149. Reducciones de quebrados. *Reducciones de quebrados son las transformaciones que se pueden hacer con ellos, sin alterar su valor.* Hay tres principales:

1º Simplificación de quebrados.

2º Reducción de quebrados a un común denominador.

3º Reducción de quebrados a forma mixta y viceversa.

150. Simplificación de quebrados. *Simplificar un quebrado es hallar otro equivalente, cuyos términos sean de grado inferior.*

Generalmente se simplifica un quebrado hasta reducirlo a su *más simple expresión.*

151. Reducir un quebrado a su más simple expresión. Sea reducir el quebrado $\frac{12a^3b^2c}{18ab^3c^2}$ a su más simple expresión.

Según el principio fundamental, se pueden dividir sus dos términos entre $2abc$, y se tiene:

$$\frac{12a^3b^2c : 2abc}{18ab^3c^2 : 2abc} = \frac{6a^2b}{9b^2c}.$$

Los dos términos del nuevo quebrado pueden dividirse aún entre $3b$, y resulta:

$$\frac{6a^2b : 3b}{9b^2c : 3b} = \frac{2a^2}{3bc}.$$

La fracción propuesta ha quedado reducida a su más simple expresión, porque sus dos términos ya no tienen ningún factor común, y se dice que el quebrado es *irreducible.*

Un quebrado está reducido a su más simple expresión, o sea, es irreducible, cuando sus dos términos no tienen más divisor común que el número 1.

Para llegar a este resultado, se han dividido sucesivamente los términos del quebrado entre sus factores comunes, cuyo producto es el *máximo común divisor* (m. c. d.) de los términos de dicho quebrado.

Para reducir un quebrado a su más simple expresión mediante una sola división, se dividen sus dos términos entre su máximo común divisor.

152. Aplicaciones. Reducir a su más simple expresión:

$$\frac{144a^5b^4c^3d}{36a^4b^5c^2} \quad \text{y} \quad \frac{a^2-b^2}{a^4-b^4}.$$

1º El m. c. d. de los dos términos del primer quebrado es $36a^4b^4c^2$; se tiene pues: $\frac{144a^5b^4c^3d : 36a^4b^4c^2}{36a^4b^5c^2 : 36a^4b^4c^2} = \frac{4acd}{b}$.

2º Como $a^4-b^4 = (a^2+b^2)(a^2-b^2)$, se puede escribir:

$$\frac{a^2-b^2}{a^4-b^4} = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)} = \frac{1}{a^2+b^2}.$$

EJERCICIO 28

Reducir los quebrados siguientes a su más simple expresión:

1. $\frac{a}{a^3}$.

2. $\frac{4x^5}{12x^7}$.

3. $\frac{64a^2}{32a^3}$.

4. $\frac{ax^3}{5x^3}$.

5. $\frac{a^4x^2}{a^2x^3}$.

6. $\frac{8a^2b^3}{24a^3b^2}$.

7. $\frac{32x^2y^4z^3}{16x^4y^2z^4}$.

8. $\frac{27a^2b^2c^3d^4}{63a^3b^3c^4d^5}$.

9. $\frac{532x^5y^4z^2}{644x^4y^3z^3u^2}$.

10. $\frac{96a^3b^4c^3}{8a^2b^3c^4d}$.

11. $\frac{25a^2b^5 \times 15a^3b^6}{150a^6b^9}$.

12. $\frac{72a^4b^3c^5d^2 \times abcd^3}{1296a^3b^4c^4d^5}$.

13. $\frac{a^2-1}{a-1}$.

14. $\frac{a+b}{a^2-b^2}$.

15. $\frac{a^2+b^2}{a^4-b^4}$.

16. $\frac{a^2-ab}{a^3-ab^2}$.

17. $\frac{\frac{1}{5}ab \times \frac{1}{3}a^2b^2}{\frac{1}{15}a^3b^3}$.

18. $\frac{48a^3b^3 : 4a^3b^2}{2ab^2}$.

19. $\frac{(4a^2x^3)^3}{(2ax^2)^4}$.

20. $\frac{(12a^3b^2c)^3(6a^5b)^2}{(36a^3b^2c^2)^2}$.

21. $\frac{a^3-b^3}{a^2-ab}$.

22. $\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}$.

23. $\frac{a+b}{a^3+b^3}$.

24. $\frac{16a^4-81}{4a^2+9}$.

25. $\frac{(x+y)^2}{(x+y)^3}$.

26. $\frac{m^2+2mn+n^2}{m^2-n^2}$.

27. $\frac{a+3}{a^2+5a+6}$.

28. $\frac{x-4}{x^2-7x+12}$.

29. $\frac{x+1}{x^2+4x+3}$.

30. $\frac{r^3-s^3}{2r^2-3rs+s^2}$.

31. $\frac{64-b^3}{16-8b+b^2}$.

Transformar en irreducibles las fracciones siguientes:

32. $\frac{1-216c^3}{x-4y-6cx+24cy}$.

33. $\frac{a^2-3a-3b+ab}{(a^2-b^2)(a-3)}$.

34. $\frac{5m^3n^4-12m^2n^5+7m^3n^3}{6m^5n^2+3m^2n^2}$.

35. $\frac{4x^4-28x^3+48x^2}{2x^3-8x^2+6x^2}$.

36. $\frac{4a^3-42a^2+20a}{2a^4b^6-20a^3b^2}$.

37. $\frac{a(x-y)^3}{(x^2-y^2)(x-y)}$.

38. $\frac{(x^2-y^2)(x^2+2xy+y^2)}{(x^2-2xy+y^2)(x+y)}$.

39. $\frac{x^3+27}{4x^2+24x+36}$.

40. $\frac{(x^2-4)(x^2+4)(x+5)}{(x-2)(x^2+3x-10)(x^4-16)}$.

III. REDUCCION DE QUEBRADOS A UN COMUN DENOMINADOR

153. Definición. *Reducir dos o más quebrados a un común denominador, es hallar otros, respectivamente equivalentes a los primeros, cuyos denominadores sean iguales.*

154. Reducción a un común denominador. Sean los quebrados

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{d}, \quad \frac{m}{n}.$$

Si se multiplican los dos términos del primer quebrado por dn, los del segundo por bn, y los del tercero por bd, ninguno de los quebrados cambia de valor (Nº 145), y se convierten respectivamente en:

$$\frac{adn}{bdn}, \quad \frac{cbn}{bdn}, \quad \frac{mbd}{bdn},$$

que, como se ve, tienen el mismo denominador.

Para reducir dos o más quebrados a un común denominador, se multiplican ambos términos de cada uno de ellos por el producto de los denominadores de todos los demás.

155. Quebrados reducidos a su menor denominador común. Con el objeto de evitar denominadores muy grandes, es preferible, siempre que sea posible, reducir los quebrados a su *menor común denominador*, es decir, transformarlos en otros, respectivamente equivalentes a los propuestos, cuyo denominador común sea mínimo.

EJEMPLO: Sean los quebrados $\frac{2x}{5(x^2-4)}$ y $\frac{6x}{35(x^2-6x+8)}$.

Para reducirlos a su menor común denominador, se debe hallar una expresión que sea múltiplo de $5(x^2-4)$ y al mismo tiempo de $35(x^2-6x+8)$, y tal que su coeficiente sea el m. c. m. de los coeficientes de los denominadores y que el grado de la parte literal sea mínimo.

El primer denominador, $5(x^2-4)$, se descompone en: $5(x+2)(x-2)$, y el segundo, $35(x^2-6x+8)$ es igual a $5 \times 7(x-2)(x-4)$, según lo explicado en el Nº 138. Entonces, en vez de tomar como denominador común el producto de $5(x^2-4)$ por $35(x^2-6x+8)$, basta tomar

$$5 \times 7(x+2)(x-2(x-4),$$

que es el m. c. m. de los denominadores de los quebrados dados.

Si al primer quebrado se le da por denominador

$$35(x+2)(x-2)(x-4) = 35(x^2-4)(x-4),$$

dicho denominador queda multiplicado por $7(x-4)$; para que no se altere el valor del quebrado hay que multiplicar el numerador por el mismo factor, y así se obtiene:

$$\frac{2x \times 7(x-4)}{35(x+2)(x-2)(x-4)} = \frac{14x(x-4)}{35(x^2-4)(x-4)}.$$

Dando al segundo quebrado el mismo denominador, el suyo queda multiplicado por $(x+2)$; para no alterar el valor del quebrado, hay que multiplicar también el numerador por $(x+2)$, y así resulta:

$$\frac{6x(x+2)}{35(x+2)(x-2)(x-4)} = \frac{6x(x+2)}{35(x^2-6x+8)(x+2)}.$$

156. Mínimo común múltiplo de varias expresiones algebraicas. El menor común denominador que se ha obtenido en el ejemplo anterior, es el *mínimo común múltiplo* (m. c. m.) de los denominadores de los quebrados dados.

Para obtener el m. c. m. de dos o más expresiones algebraicas:

1º *Descompónganse éstas en factores.*

2º *Tómese, como coeficiente numérico del m. c. m. buscado, el de los coeficientes de los factores, calculado como se procede en Aritmética.*

3º *Escríbanse a continuación de dicho coeficiente todos los factores diferentes que figuran en las expresiones dadas, con su más alto exponente.*

157. Reducción al menor común denominador empleando el m. c. m. *Para reducir dos o más fracciones a su menor común denominador, por el método del m. c. m.:*

1º *Tómese como denominador común el m. c. m. de los denominadores.*

2º *Divídase ese común denominador entre el denominador de cada fracción.*

3º *Multiplíquese el numerador de cada fracción por el cociente respectivo obtenido.*

158. Aplicaciones. **Reducir a su menor común denominador:**

1º $\frac{5ax^2}{8by^2}$, $\frac{7by}{10x^2z}$, $\frac{8cx^3}{15yz^3}$.

m. c. m. $(8, 10, 15) = 120$;

m. c. m. $(8by^2, 10x^2z, 15yz^3) = 120bx^2y^2z^3$.

Efectuando las operaciones indicadas, resulta:

$$\frac{75ax^4z^3}{120bx^2y^2z^3}, \quad \frac{84b^2y^3z^2}{120bx^2y^2z^3}, \quad \frac{64bcx^2y}{120bx^2y^2z^3}.$$

2º $\frac{2}{3m^3-12m^2}$, $\frac{m}{m^2-6m+8}$, $\frac{m^2}{m^3-8}$.

Según lo explicado en el capítulo anterior, los factores de los denominadores son como sigue:

$$3m^3-12m^2 = 3m^2(m-4),$$
$$m^2-6m+8 = (m-2)(m-4),$$
$$m^3-8 = (m-2)(m^2+2m+4).$$

Por tanto, el menor común denominador es:

$$3m^2(m-4)(m-2)(m^2+2m+4).$$

Y los quebrados se transforman respectivamente en:

$$\frac{2(m-2)(m^2+2m+4)}{3m^2(m-2)(m-4)(m^2+2m+4)},$$

$$\frac{m \times 3m^2(m^2+2m+4)}{3m^2(m-2)(m-4)(m^2+2m+4)},$$

$$\frac{m^2 \times 3m^2(m-4)}{3m^2(m-2)(m-4)(m^2+2m+4)}.$$

EJERCICIO 29

Hállese el m. c. m. de las expresiones siguientes:

1. a^2c, bc^2, cb^3.
2. $2mn$, $3m^2n$, $4mn^2$.
3. $1-2x$, $1+2x$, $1-4x^2$.
4. $5x^2y^3z^2$, $4xyz^5$.
5. $24a^5b^3c^3$, $42a^6b^5c^2$.
6. x^2-1, $2x-2$, $1+x$, $x-1$, x.
7. $uv-v^2$, $uv-u^2$, $u-v$, u.
8. $3(a-2)$, a^2-4a+4, a^3-2a.
9. $m-3$, $m-4$, $m^2-7m+12$.
10. $12a^2+3a-42$, $12a^2+30a+12$, $32a^3-40a-28$.

Reducir las expresiones siguientes a su menor común denominador:

11. $5, \frac{a}{b}$.

12. $\frac{a}{4}, \frac{b}{3}$.

13. $4, \frac{a}{b}-\frac{c}{d}$.

14. $\frac{2}{3}, -a$.

15. $\frac{a}{bc}, \frac{b}{ac}, \frac{-c}{ab}$.

16. $\frac{a}{-bx}, \frac{-b}{ax^2}, \frac{c}{abx^2}$.

17. $\frac{a}{b}, \frac{-a}{b}$.

18. $1, \frac{b}{a}, \frac{b^2}{a^2}, \frac{b^3}{a^3}$.

19. $1, \frac{a}{x}, \frac{-a}{x^2}, -a^2$.

20. $2, -1, \frac{1}{2a^2}, \frac{1}{-4a^4}$.

21. $\frac{ab-a}{b+1}, \frac{ab+a}{b-1}$.

22. $\frac{a}{a-b}, \frac{c}{a^2-b^2}$.

23. $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a-b}, \frac{1}{a^2-b^2}$.

24. $\frac{a}{b^2c}, \frac{b}{a^2c}, \frac{d}{abc^2}$.

25. $\frac{a}{a^4-b^4}, \frac{1}{a^2+b^2}, \frac{1}{a^2-b^2}$.

26. $\frac{1}{5x^2}, \frac{-4x}{5}, \frac{-11}{2x^2}, \frac{-7}{4}$.

27. $\frac{1}{a^2}, a^2, \frac{-2}{a^2}, \frac{-a^2}{2}$.

28. $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{ab}, \frac{1}{ac}, \frac{1}{bc}, \frac{1}{abc}$.

29. $\frac{2x-5y}{9x^2y}, \frac{4x+3y}{12xy^3}$.

30. $\frac{m+5}{m-n}, \frac{4a}{m^2+2mn+n^2}$.

31. $\frac{3-x}{x^2-9x+20}, \frac{x+4}{7x^2-26x-8}$.

32. $\frac{a}{3-m}, \frac{b-1}{m+1}, \frac{c+2}{x-3}$.

33. $\frac{n}{5x^2-4x-12}, \frac{r}{x^2+4x-12}, \frac{s}{x-2}$.

34. $\frac{a+b}{b-a}, \frac{a-b}{(a+b)^2}, \frac{a}{a^2-b^2}$.

35. $\frac{1}{a^3-b^3}, \frac{5m}{b-a}, \frac{2n}{a^2+ab+b^2}$.

36. $\frac{2}{3x^3-21x^2}, \frac{3x}{x^2-5x-14}, \frac{x^3}{x^3-343}$.

37. $\frac{m+n}{am-bm-an+bn}, \frac{x-y}{m^2-2mn+n^2}$.

38. $\frac{m+5}{m^2-m-6}, \frac{m+3}{m^2+7m+10}, \frac{m-2}{m^2+2m-15}$.

39. $\frac{a^2b-ab^2}{a^2-b^2}, \frac{a^3+a^2b}{a^2+2ab+b^2}, \frac{a^2-2ab}{a+b}$.

40. $\frac{x}{(a-b)(b-c)}, \frac{y}{(b-c)(c-a)}, \frac{z}{(c-a)(a-b)}$.

IV. REDUCCION DE QUEBRADOS A FORMA MIXTA Y VICEVERSA

159. Reducción de un quebrado a forma mixta. *Una expresión es de forma mixta cuando comprende una parte entera y una parte fraccionaria.*

Así, $x+\frac{a}{b}$ y $x+\frac{m-n}{r-s}$ son expresiones de forma mixta.

Como se explicó en el Nº 106, las expresiones de *forma mixta* provienen de divisiones en que el dividendo no es múltiplo del divisor. Por consiguiente, siempre que la división del numerador de una fracción entre su denominador deje un residuo, el cociente completo es de forma mixta.

Sea la fracción $\frac{am+2m^2}{a+m}$. Efectuando la división, resulta:

$$(am+2m^2):(a+m)=m+\frac{m^2}{a+m}.$$

Para reducir una fracción a forma mixta:

1º *Divídase el numerador entre el denominador.*

2º *Escríbase la parte entera del cociente como parte entera de la expresión mixta.*

3º *Póngase el residuo como numerador de una fracción cuyo denominador sea el de la fracción propuesta.*

4º *Indíquese la suma algebraica de la parte entera y de la fracción.*

160. Aplicaciones. Reducir a forma mixta: 1º $\frac{6x^2+15x+2}{3x}$.

Efectuando la división, se tiene:

$$\frac{6x^2+15x+2}{3x}=2x+5+\frac{2}{3x}.$$

2º $\frac{12m^3-8m^2+4m-5}{4m^2+3}$.

La división da por resultado:

$$\frac{12m^3-8m^2+4m-5}{4m^2+3}=3m-2+\frac{-5m+1}{4m^2+3}=3m-2-\frac{5m-1}{4m^2+3}.$$

161. Reducción de una expresión mixta a forma fraccionaria. La reducción de una expresión mixta a forma fraccionaria es operación inversa de la que se acaba de explicar.

Para reducir una expresión mixta a forma fraccionaria:

1º *Multiplíquese la parte entera por el denominador de la fracción.*

2º *Súmese algebraicamente el producto obtenido con el numerador de la fracción.*

3º *Dése a esa suma como denominador el de la expresión mixta.*

162. Aplicaciones. Reducir a forma fraccionaria:

1º $2x-1+\frac{x-2}{x^2-5}$.

Aplicando la regla:

$$2x-1+\frac{x-2}{x^2-5}=\frac{(2x-1)(x^2-5)+(x-2)}{x^2-5}=\frac{2x^3-x^2-9x+3}{x^2-5}.$$

2º $m-n-\frac{m^2-mn-n^2}{m+n}$.

Según la regla indicada:

$$m-n-\frac{m^2-mn-n^2}{m+n}=\frac{(m-n)(m+n)-(m^2-mn-n^2)}{m+n}$$
$$=\frac{m^2-n^2-m^2+mn+n^2}{m+n}=\frac{mn}{m+n}.$$

EJERCICIO 30

Reducir a forma mixta los quebrados siguientes:

1. $\frac{3x+4}{x+3}$.
2. $\frac{6x^2+1}{3x+3}$.
3. $\frac{4x^2}{2x-7y}$.
4. $\frac{m^3-n^3}{m+n}$.
5. $\frac{6x^2-18x+5}{3x-4}$.
6. $\frac{15m^3+6m^2-3m-8}{3m-5}$.
7. $\frac{2m^3-3m^2-5}{m^2-m-1}$.
8. $\frac{12x^2-5x-5}{4x-1}$.
9. $\frac{18m^3-3m^2+38}{3m^2-4m+5}$.
10. $\frac{8x^4+16x^3-10x^2-28x+11}{2x^2+x-3}$.

Reducir a forma fraccionaria las expresiones mixtas que siguen:

11. $a-r+\frac{r^2}{a+r}$.
12. $m+2-\frac{4}{m-3}$.
13. $a^3-ab+b^2-\frac{b^3}{a+b}$.
14. $2m-4-\frac{m+5}{4m}$.
15. $\frac{4x+3y}{4x-3y}-1$.
16. $2n+4+\frac{4n^2+16}{2n-4}$.
17. $\frac{6x(2x-3)}{2x+3}+4x^2-9$.
18. $\frac{(s^2-1)^2}{s^2+s+1}-(s^2-s+1)$.
19. $x^3+x^2y+xy^2+y^3+\frac{2y^4}{x-y}$.
20. $r+3n-\frac{r^3-27n^3}{r^2-3rn+9n^2}$.

V. SUMA Y RESTA DE QUEBRADOS

163. Suma de quebrados. Sea sumar los quebrados

$$\frac{a}{n},\quad \frac{b}{n},\quad \frac{c}{n}.$$

La suma pedida es:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n}=\frac{a+b+c}{n}.$$

En efecto: $\frac{a+b+c}{n}=(a+b+c):n=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n}$.

164. Resta de quebrados. Sea restar $\frac{b}{n}$ de $\frac{a}{n}$.

Análogamente a la suma, se tiene:

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}$$

Para sumar o restar quebrados de igual denominador:

1º *Súmense o réstense algebraicamente los numeradores.*

2º *Dése al resultado por denominador el denominador común.*

3º *Simplifíquese el quebrado resultante, si se puede.*

165. Observación. Si los quebrados tienen denominadores diferentes, *hay que reducirlos primero a un común denominador.*

166. **Aplicaciones.** 1º Sumar los quebrados $\frac{a}{2b}$, $\frac{b}{2a}$, $\frac{c}{3ab}$.

El menor denominador común es $6ab$. Hecha la reducción, los quebrados se transforman respectivamente en:

$$\frac{3a^2}{6ab}, \quad \frac{3b^2}{6ab}, \quad \frac{2c}{6ab}.$$

Por tanto: $\frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} + \frac{c}{3ab} = \frac{3a^2+3b^2+2c}{6ab}$.

2º Restar el quebrado $\frac{4b}{a+b}$ de $\frac{2a}{a-b}$.

Reduciendo a común denominador, se obtiene:

$$\frac{2a}{a-b} - \frac{4b}{a+b} = \frac{2a(a+b)-4b(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{2a^2-2ab+4b^2}{a^2-b^2}.$$

3º Efectuar las operaciones siguientes: $x + \frac{2x}{x-1} - \frac{3x}{x+1}$.

Según las observaciones anteriores, se tiene sucesivamente:

$$x + \frac{2x}{x-1} - \frac{3x}{x+1} = \frac{x(x-1)+2x}{x-1} - \frac{3x}{x+1} = \frac{x^2+x}{x-1} - \frac{3x}{x+1}$$

$$= \frac{(x^2+x)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{3x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^3+2x^2+x}{x^2-1} - \frac{3x^2-3x}{x^2-1}$$

$$= \frac{x^3+2x^2+x-3x^2+3x}{x^2-1} = \frac{x^3-x^2+4x}{x^2-1}.$$

EJERCICIO 31

Efectuar las operaciones indicadas.

1. $1+\frac{a}{b}$.
2. $a+\frac{c}{4}$.
3. $a-\frac{a^2}{b}$.
4. $a-b+\frac{c}{a^2}$.
5. $\frac{a-c}{b} - \frac{a-b}{c}$.
6. $\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2-1}$.
7. $\frac{(x-y)^2}{x^2} - \frac{(x+y)^2}{y^2}$.
8. $\frac{a}{b} - a + b + ab$.
9. $ab^2 + b^3 + \frac{2b^4}{a-b}$.
10. $x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2-1}$.
11. $\frac{x+2}{y-x} - \frac{y-2}{y+x}$.
12. $\frac{cx-c}{x-1} - \frac{cx+c}{x+1}$.
13. $ax(a+x) - \frac{a^2x+ax^2}{a^2+2ax+x^2}$.
14. $1-2n+\frac{n^2+2n^2+1}{n^2+2n+1}$.

15. $\frac{1}{(x-1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x-3)} + \frac{1}{(x-1)(3-x)}$.
16. $\frac{x^2+4xy}{x^3+y^3} + \frac{1}{x+y} - \frac{x}{x^2-xy+y^2}$.
17. $\frac{a-3}{a^2-3a+2} - \frac{a-1}{a^2-5a+6} + \frac{a}{a^2-4a+3}$.
18. $\frac{x}{x^2-5x-14} + \frac{2}{x-7} - \frac{x}{x^2-9x+14}$.
19. $\frac{a+2}{a^2-a-6} + \frac{a-4}{a^2-7a+12} - \frac{a+2}{a^2-2a-8}$.
20. $\frac{2}{m^2-11m+30} - \frac{1}{m^2-36} + \frac{1}{m^2-25}$.
21. $\frac{4}{a-3} - \frac{a-1}{a^2+3a+9} + \frac{a^2-11a-3}{a^3-27}$.
22. $\frac{x+1}{2(x-1)} - \frac{x-1}{2(x+1)} + \frac{x^2-4x+1}{x^2-1}$.

VI. MULTIPLICACION Y DIVISION DE QUEBRADOS

167. **Multiplicación de quebrados.** Sea multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$.

Llamando p el producto, se tiene: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = p$.

Multiplicando los dos miembros de la igualdad por bd, resulta:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times bd = p \times bd.$$

Cambiando el orden de los factores, se tiene:

$$\left(\frac{a}{b} \times b\right)\left(\frac{c}{d} \times d\right) = p \times bd.$$

Simplificando en los paréntesis, queda: $a \times c = p \times bd$.

Dividiendo los dos miembros entre bd, se obtiene:

$$\frac{a \times c}{b \times d} = p.$$

Para obtener el producto de dos o más quebrados:

1º *Multiplíquense separadamente los numeradores y los denominadores.*

2º *Indíquese la división del primer producto entre el segundo.*

3º *Simplifíquese la expresión obtenida, cuando sea posible.*

168. Aplicaciones. 1º Efectuar la multiplicación siguiente:

$$\frac{3}{5} \times \frac{15a^4}{7ab^5} \times \left(-\frac{11b^3}{9a^2}\right).$$

Los productos de los numeradores y denominadores son respectivamente:

$$3 \times 15a^4 \times (-11b^3) = -495a^4b^3,$$
$$5 \times 7ab^5 \times 9a^2 = 315a^3b^6.$$

Luego: $\frac{3}{5} \times \frac{15a^4}{7ab^5} \times \left(-\frac{11b^3}{9a^2}\right) = -\frac{495a^4b^3}{315a^3b^5} = -\frac{11a}{7b^2}$.

2º Multiplicar $\frac{x^4-1}{16x^4-9x^2} \times \frac{4x+3}{2x^2+2} \times \left(4x + \frac{x}{x-1}\right)$.

Reduciendo el tercer factor a forma fraccionaria y efectuando, se tiene sucesivamente:

$$\frac{x^4-1}{16x^4-9x^2} \times \frac{4x+3}{2x^2+2} \times \left(4x + \frac{x}{x-1}\right) = \frac{x^4-1}{16x^4-9x^2} \times \frac{4x+3}{2x^2+2} \times \frac{4x^2-3x}{x-1}$$
$$= \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2(16x^2-9)} \times \frac{(16x^2-9)x}{2(x^2+1)(x-1)} = \frac{x+1}{2x}.$$

169. Números y quebrados recíprocos. *Dos números o quebrados son recíprocos, cuando su producto es igual a* 1.

Así, 3 y $\frac{1}{3}$, a y $\frac{1}{a}$, $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ son expresiones recíprocas.

170. División de quebrados. Sea dividir $\frac{ab}{cd}$ entre $\frac{a}{d}$.

Puesto que para multiplicar dos quebrados se hace, por separado, el producto de los numeradores y de los denominadores, y se divide el primero entre el segundo, análogamente, ***se puede dividir un quebrado entre otro, hallando separadamente el cociente de los numeradores y de los denominadores, y dividiendo el primero entre el segundo.***

Así, resulta: $\frac{ab}{cd} : \frac{a}{d} = \frac{ab:a}{cd:d} = \frac{b}{c}$.

Pero, como sucede frecuentemente que algún término del dividendo no es divisible entre el término correspondiente del divisor, *para obtener el cociente pedido se multiplica el quebrado dividendo por el recíproco del divisor*, procedimiento que se funda en lo que se explica a continuación.

Sea dividir $\frac{m}{n}$ entre $\frac{r}{s}$.

Llamando c el cociente, se puede escribir:

$$\frac{m}{n} : \frac{r}{s} = c.$$

Como el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, se tiene: $\frac{m}{n} = c \times \frac{r}{s}$.

Multiplicando cada miembro de esta igualdad por $\frac{s}{r}$, resulta:

$$\frac{m}{n} \times \frac{s}{r} = c \times \frac{r}{s} \times \frac{s}{r} = c.$$

O sea, reemplazando c por su valor:

$$\frac{m}{n} : \frac{r}{s} = \frac{m}{n} \times \frac{s}{r}.$$

171. Aplicaciones. 1º Dividir $\frac{9(x^2-y^2)}{16(a^4-b^4)}$ entre $\frac{3(x+y)}{8(a^2-b^2)}$.

Se tiene:

$$\frac{9(x^2-y^2)}{16(a^4-b^4)} : \frac{3(x+y)}{8(a^2-b^2)} = \frac{9(x^2-y^2) : 3(x+y)}{16(a^4-b^4) : 8(a^2-b^2)} = \frac{3(x-y)}{2(a^2+b^2)}.$$

2º Efectuar la división siguiente: $\frac{33a^3x^5y^6}{a^2-b^2} : \frac{22a^4x^4y^5}{a^4-b^4}$.

Haciendo el producto del dividendo por el recíproco del divisor, resulta:

$$\frac{33a^3x^5y^6}{a^2-b^2} : \frac{22a^4x^4y^5}{a^4-b^4} = \frac{33a^3x^5y^6}{a^2-b^2} \times \frac{a^4-b^4}{22a^4x^4y^5} = \frac{3xy(a^2+b^2)}{2a}.$$

3º Dividir $\frac{x^4-y^4}{x^2y}$ entre $x + \frac{y^2}{x}$.

Reduciendo el divisor a forma fraccionaria y efectuando, se tiene sucesivamente:

$$\frac{x^4-y^4}{x^2y} : \left(x + \frac{y^2}{x}\right) = \frac{x^4-y^4}{x^2y} : \frac{x^2+y^2}{x} = \frac{x^4-y^4}{x^2y} \times \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{xy}.$$

EJERCICIO 32

Efectuar las operaciones siguientes y simplificar:

1. $\frac{3a-6}{2a} \times \frac{3a^2}{a-2}$.
2. $\frac{a}{a-1} \times \frac{a^2-1}{a} \times \frac{a}{a+1}$.
3. $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{a^2}{b^2}\right)$.
4. $\frac{c}{a}\left(a - \frac{a^2}{c}\right)$.
5. $\frac{a^2}{b^2}\left(ab^2 - \frac{b^2}{a^2}\right)$.
6. $\frac{x-y}{a+b} \times \frac{a^3+b^3}{x^3-y^3}$.
7. $\frac{a^2-5a}{a+5} \times \frac{a^2-25}{a}$.
8. $\left(\frac{1+a}{1-a} - \frac{1-a}{1+a}\right)(1-a)$.

9. $\left(a+b-\frac{1}{a+b}\right)\left(a-b+\frac{1}{a-b}\right)$.

10. $\frac{16x^4-1}{x^3-64x} \times \frac{x^2+8x}{4x-1}$.

11. $\frac{a^2+3a-18}{a^2-8a+12} \times \frac{2a^3-4a^2}{a^2-36}$.

12. $\frac{mn+n^2}{m^2-mn} \times \frac{m^2+mn-2n^2}{m^2+2mn+n^2}$.

13. $\frac{5u+15}{8u-4} \times \frac{3u-9}{10u+5} \times \frac{8u^2-2}{3u^2-27}$.

14. $\frac{x^2+2x}{x^2-3x-4} \times \frac{x^2-16}{x^2-x} \times \frac{x^2+x}{x^2+6x+8}$.

15. $\frac{m^3n+mn^3}{m^4-2m^2n^2+n^4} \times \frac{m^2+2mn+n^2}{m^2+n^2} \times \frac{m^2-2mn+n^2}{mn}$.

16. $\frac{z^4-1}{16z^4-9z^2} \times \frac{4z+3}{2z^2+2}\left(4z+\frac{z}{z-1}\right)$.

17. $\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2} : \frac{a+b}{x+y}$.

18. $\frac{4-x^4}{3xy} : (x^2+2)$.

19. $\frac{x^2-4x+3}{3(x+2)} : (x-1)$.

20. $\frac{(n^2-1)^2}{25(m+2)^2} : \frac{1}{5(m+2)}$.

21. $\frac{4a^2b^3}{c^5} : \frac{16a^2b^4}{c^6}$.

22. $9a^2b : \left(-\frac{3a^4b^2}{c^2}\right)$.

23. $(x+y) : \frac{x^2-y^2}{y}$.

24. $4x^2y^3 : \frac{2ax^3}{y^2-ay}$.

25. $\frac{21(a^3+b^3)}{76(a^3-b^3)} : \frac{7(a+b)}{19(a-b)}$.

26. $\frac{28(x^4-x^2)}{39(u^2-v^2)} : \frac{7(x^2+x)}{13(u-v)}$.

27. $\frac{15(x^2-9)}{2(x^3+x)} : \frac{5(3-x)}{x^2+1}$.

28. $\frac{a^2-(b+c)^2}{b^2-(a+c)^2} : \frac{a-b-c}{b-a-c}$.

29. $\frac{77(m^2-4mx+4x^2)}{91(m^3-9mx^2)} : \frac{11(m-2x)}{7(m+3x)}$.

30. $\frac{161(a^2-9b^2)}{407(16x^2-y^4)} : \frac{23(3b-a)}{37(y^2-4x)}$.

31. $\frac{ab+b^2}{b^3} : \frac{a+b}{a}$.

32. $\frac{a^3+b^3}{(a+b)^3} : \frac{(a^3+b^3)^2}{(a+b)^4}$.

33. $\left(a^2+2a+1-\frac{1}{a^2}\right) : \left(a+1+\frac{1}{a}\right)$.

34. $\frac{171(x^2-y^2)}{19x^2-18xy-y^2} : \frac{9(x+y)}{y^2}$.

35. $\frac{3}{a^2-6a+8} : \frac{2}{a^2-a-12}$.

36. $\frac{a^3-8}{a^2+7a+10} : \frac{a^2+2a+4}{a^2+2a}$.

37. $\frac{4m^2-25x^2}{16m^2-9x^2} : \frac{2mx-5x^2}{4m^2+3mx}$.

38. $\frac{x^2+10x+21}{x^3-4x^2+3x} : \frac{x^2-9}{x^3-x^2}$.

39. $\frac{r^2+4rs+4s^2}{r-s} : \frac{rs+2s^2}{r^2-rs}$.

40. $\frac{m^2-m}{m^3+1} : \frac{m^2-2m+1}{m^3-m^2+m}$.

41. $\frac{x^2-14x-15}{x^2-4x-45} : \frac{x^2-12x-45}{x^2-6x-27}$.

VII. FRACCIONES COMPLEJAS

172. **Definición y simplificación.** *Fracciones complejas son aquellas en que el numerador, el denominador, o ambos a la vez, contienen fracciones*; v. gr.

$$\frac{1-\frac{3}{x}}{4}, \quad \frac{2}{1+\frac{5}{m}}, \quad \frac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}.$$

Dichas fracciones constituyen un caso particular de la división de quebrados; pero generalmente pueden simplificarse y reducirse a la forma ordinaria.

EJEMPLOS:

Simplificar: $\frac{1+\frac{1}{2m}}{m-\frac{1}{4m}}$ y $\frac{3m-8}{m-1-\frac{1}{1-\frac{m}{4+m}}}$.

1º Incorporando el entero al quebrado, tanto en el numerador como en el denominador, y simplificando, se obtiene sucesivamente:

$$\frac{1+\frac{1}{2m}}{m-\frac{1}{4m}} = \frac{\frac{2m+1}{2m}}{\frac{4m^2-1}{4m}} = \frac{(2m+1)2}{(2m+1)(2m-1)} = \frac{2}{2m-1}.$$

2º Transformando primero el denominador en fracción ordinaria y efectuando, resulta sucesivamente:

$$\frac{3m-8}{m-1-\frac{1}{1-\frac{m}{4+m}}} = \frac{3m-8}{m-1-\frac{4+m}{4}} = \frac{3m-8}{\frac{3m-8}{4}} = \frac{4(3m-8)}{3m-8} = 4.$$

EJERCICIO 33

Simplificar las expresiones siguientes:

1. $\dfrac{x+\frac{x}{y}}{x-\frac{x}{y}}$.

2. $\dfrac{a+\frac{1}{b}}{a-\frac{1}{b}}$.

3. $\dfrac{\frac{x+y}{x}}{\frac{x-y}{y}}$.

4. $\dfrac{\frac{x+y}{x-y}}{\frac{x-y}{x+y}}$.

5. $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}$.

6. $\dfrac{\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}}{\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}}$.

7. $\dfrac{\frac{m}{n}-\frac{n}{m}}{\frac{(m+n)^2}{mn}-4}$.

8. $\dfrac{a}{a+\frac{1}{a+\frac{1}{b}}}$.

9. $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$.

10. $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}} : \dfrac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a+c}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a+c}}$.

11. $\dfrac{\frac{x}{x+y}-\frac{x-y}{x}}{\frac{x}{x-y}-\frac{x+y}{x}}$.

12. $\dfrac{x-\frac{2u^2}{x-u}}{x+\frac{u^2}{x+2u}}$.

13. $\dfrac{m-n-\frac{2n(m-n)}{m+n}}{\frac{m^2+n^2}{mn+n^2}-1}$.

14. $\dfrac{\frac{1-a^2}{1+a^2}-\frac{1+a^2}{1-a^2}}{\frac{1-a}{1+a}-\frac{1+a}{1-a}}$.

VIII. INTERPRETACION DE LAS FORMAS

$$\frac{m}{0},\quad \frac{m}{\infty},\quad \frac{0}{m},\quad \frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty}.$$

173. Valor de $\frac{m}{0}$. Si en el quebrado $\frac{2}{x}$ se asignan a x valores positivos cada vez menores, como: 1, .1, .01, .001, .0001, etc., el quebrado adquiere valores positivos cada vez más grandes, a saber: 2, 20, 200, 2 000, 20 000, etc. Es decir, que a medida que x decrece y se acerca a cero, el cociente crece sin cesar y puede llegar a ser mayor que cualquier número, por grande que se lo suponga. Este resultado se representa por el símbolo ∞, que se llama *infinito*.

Por tanto: $$\frac{m}{0}=\infty.$$

Notas. — 1ª En la expresión $\frac{m}{0}=\infty$, no debe entenderse que el denominador sea precisamente igual a cero, sino que es un número tan pequeño que difiere de cero tan poco como se quiera.

2ª El símbolo ∞ tampoco representa un número determinado; indica simplemente que cierta magnitud crece indefinidamente, hasta llegar a ser mayor que cualquier número, por grande que se suponga.

174. Valor de $\frac{m}{\infty}$. Si en el quebrado $\frac{1}{x}$ se hace x igual, sucesivamente, a: 1, 10, 100, 1 000, etc., los cocientes respectivos son: 1, .1, .01, .001, etc., es decir, decrecen constantemente. Luego, el quebrado $\frac{1}{x}$ puede llegar a ser menor que cualquier número, por pequeño que se lo suponga. El resultado se representa por $\frac{m}{\infty}$, que se hace simbólicamente *igual a cero*.

Se tiene pues: $$\frac{m}{\infty}=0.$$

175. Valor de $\frac{0}{m}$. Si el dividendo de una división es nulo, y el divisor es diferente de cero, el cociente no puede ser otro que cero, porque es el único número que, multiplicado por otro diferente de cero, dé un resultado nulo.

$$\frac{0}{m}=0.$$

176. Valor de $\frac{0}{0}$ y de $\frac{\infty}{\infty}$. Si en el quebrado $\frac{m}{n}$ se hace $m=n=0$, el cociente toma la forma de $\frac{0}{0}$ y puede igualarse a un número cualquiera, pues siendo cero el divisor, al multiplicarlo por ese número, da siempre cero como producto, es decir, reproduce el dividendo. Se puede decir, por tanto, que cero dividido entre cero da por cociente un número cualquiera. En tal caso, se dice que dicho cociente es *indeterminado*.

Por análoga razón, el cociente $\frac{\infty}{\infty}$ es también indeterminado.

A las expresiones $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ se las llama *símbolos de indeterminación*.

177. Supresión de la indeterminación. A veces la indeterminación, a más de prestarse a alguna interpretación, es tan sólo aparente, y puede suprimirse por procedimientos de Algebra elemental.

EJEMPLOS: 1º Hallar el valor de la fracción $\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$, para $x=2$.

Sustituyendo x por 2, se obtiene $\frac{0}{0}$.

Para evitar la indeterminación, se descomponen el numerador y el denominador en sus factores y se simplifica; así resulta:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}=\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)}=\frac{x-1}{x+3}$$

Haciendo x igual a 2, en este último quebrado, se obtiene:

$$\frac{2-1}{2+3}=\frac{1}{5}.$$

Como comprobación, asígnese a x un valor muy aproximado de 2, 2.0001, por ejemplo.

Se tiene: $\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}=\frac{.00010001}{.00050001}=.20001,$

aproximadamente igual a $\frac{1}{5}$.

2º ¿Cuál es el valor de $\frac{2x-3}{x+4}$ si $x\to\infty$? (*)

Si se sustituye x por ∞, se obtiene $\frac{\infty}{\infty}$.

Pero, si se dividen los dos términos del quebrado entre x, resulta (Nº 174):

$$\frac{2x-3}{x+4}=\frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{4}{x}}=\frac{2-\frac{3}{\infty}}{1+\frac{4}{\infty}}=\frac{1+0}{2-0}=2.$$

3º ¿Cuál es el valor de $\frac{x^2+2x}{x-3}$, para $x\to\infty$?

Al sustituir x por ∞, se obtiene $\frac{\infty}{\infty}$.

Pero, desaparece la indeterminación, dividiendo ambos términos del quebrado entre x (Nº 174):

$$\frac{x^2+2x}{x-3}=\frac{x+2}{1-\frac{3}{x}}=\frac{\infty+2}{1-\frac{3}{\infty}}=\frac{\infty+2}{1-0}=\infty.$$

4º Calcular el valor de $\frac{a+7}{2a^2-3a}$, si $a\to\infty$.

(*) La notación $x\to\infty$ léase: x tiende a ∞, o sea, x crece sin límite.

Si se sustituye a por ∞, resulta la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

Para evitarla, basta dividir ambos términos del quebrado entre a, y así se obtiene:

$$\frac{a+7}{2a^2-3a}=\frac{1+\frac{7}{a}}{2a-3}=\frac{1+\frac{7}{\infty}}{\infty-3}=\frac{1+0}{\infty-3}=\frac{1}{\infty}=0.$$

a) *Para que desaparezca la indeterminación* $\frac{0}{0}$:

1º *Descompónganse en sus factores los dos términos del quebrado.*

2º *Suprímanse los factores comunes a ambos términos.*

3º *Asígnese a la variable, en el nuevo quebrado, el valor indicado en el problema.*

b) *En el caso de la indeterminación* $\frac{\infty}{\infty}$:

1º *Divídanse todos los términos del numerador y del denominador entre una potencia de la variable tal que, en el dividendo o en el divisor, o en ambos a la vez, el primer término sea independiente de ella.*

2º *Atribúyase a la variable el valor particular indicado en el problema.*

EJERCICIO 34

Hacer desaparecer la indeterminación, es decir, hallar el verdadero valor de

1. $\frac{x^2-x-6}{x-3}$, para $x=3$.
2. $\frac{x+1}{x^2-x-2}$, para $x=-1$.
3. $\frac{x^2-5x+4}{x^2-8x+7}$, para $x=1$.
4. $\frac{a^3-7a+12}{a^3-4a^2+a+6}$, para $a=3$.
5. $\frac{x+5}{3x-8}$, para $x=\infty$.
6. $\frac{5x-4}{2x+7}$, para $x=\infty$.
7. $\frac{x^2+5x}{x-13}$, para $x=\infty$.
8. $\frac{x+8}{x^2+7x}$, para $x=\infty$.
9. $\frac{m^4-11m^3+39m^2-49m+20}{m^3-8m^2+19m-12}$, para $m=4$.

(Averígüese si m − 4 *divide ambos términos del quebrado).*

EJERCICIO 35

(Suplementario).

Simplificar los quebrados siguientes:

1. $\frac{4-2x}{4-x^2}$.
2. $\frac{a^2-1}{a^4-1}$.
3. $\frac{a^2+2a+1}{a^2-a-2}$.
4. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$.
5. $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$.
6. $\frac{x^3+y^3}{(x-y)^2+xy}$.
7. $\frac{(4a^2-1)^2+1}{(4a^2-1)^4-1}$.
8. $\frac{4b^2+c^2-4bc}{c^2-4b^2}$.
9. $\frac{3a^3b^4+9a^3b^3x^3}{4a^2b^5+12a^2b^3x^3}$.
10. $\frac{1-x^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$.
11. $\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}}$.
12. $\frac{\frac{x}{a}+\frac{a}{x}+2-\frac{(a-x)^2}{ax}}{4ax\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a}\right)}$.

Reducir a una sola expresión fraccionaria:

13. $\frac{12a}{a^2-1}+\frac{8a}{a^2-1}+\frac{4a}{a^2+1}$.
14. $\frac{a^2-b^2}{a^2}+\frac{2b^2}{a^2-b^2}$.
15. $a^4+a^3+a^2+a+1-\frac{a+1}{a-1}$.

16. $1-\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2$.
17. $1-\frac{b^2-a^2}{c^2}$.
18. $\frac{x-4}{x^2-x}-\frac{x-8}{x^2+3x}$.
19. $\frac{a+1}{2a-2}-\frac{a-1}{2a+2}$.
20. $\frac{2mn}{n^2-m^2}-\frac{m+n}{n-m}$.
21. $\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a^2-b^2}$.
22. $\frac{a-b}{c+d}+1-\frac{a+b}{c-d}$.
23. $\frac{ab+c}{d-1}-\frac{ab-c}{d}$.
24. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}-\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$.
25. $\frac{4xy^3+6x^3-2y^3}{x^2y}-\frac{4xy^3-2x^2y^2-2y^4}{x^2y^2}$.
26. $\frac{3a}{4a^2-9}+\frac{7}{2a+3}-\frac{2}{2a-3}$.
27. $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-5}+\frac{1}{a+5}$.
28. $\frac{2(x-3)}{x^2-2x}+\frac{3x-6}{x^2-3x}-\frac{4(x-1)}{x^2-5x+6}$.

Efectuar las siguientes operaciones y reducir:

29. $\frac{4-2a+a^2}{2+a}-2-a$.
30. $\frac{x}{x^2-1}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{2x^2}{x^4-1}$.
31. $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{2a+2b}{a-b}$.
32. $\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}\times\frac{a^3-b^3}{x^3-y^3}$.
33. $\left(x-\frac{2}{x}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)$.
34. $\left(\frac{m^3}{n^3}-1\right)\left(\frac{n^3}{m^3}-1\right)$.
35. $\frac{x^m}{y^n}\times\frac{y^m}{x^3}\times\frac{x^{n+1}}{y^{m+1}}$.
36. $x+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$.
37. $\left(\frac{m^2}{n^2}+1\right)\frac{mn^2}{m^2+n^2}$.
38. $\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}:\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.
39. $\left(\frac{a^2-1}{a^4-1}\right)^2:\left(\frac{a^4-1}{a^2-1}\right)^2$.
40. $\frac{-27a^3b^3}{c^6}:\frac{81c^3b^3}{-a^3}$.

10

RAZONES Y PROPORCIONES

I. DEFINICIONES Y PRINCIPIOS

178. Razón. Si el sueldo de un empleado es de $ 500 mensuales, y el de otro empleado es de $ 250, se dice que el primer sueldo es doble del segundo. Se ha comparado mentalmente, por división, el número 500 al número 250, y se ha obtenido $\frac{500}{250}$.

A este cociente indicado se le llama **razón.**

Razón de un número a otro es la división indicada del primero entre el segundo.

La razón de a a b se escribe $a : b$, o bien $\frac{a}{b}$, en que a y b representan expresiones algebraicas cualesquiera.

Las expresiones a y b se llaman *términos* de la *razón.*

Como se ve, una razón es equivalente a un quebrado que consta de los mismos términos.

179. Antecedente y consecuente. El primer término de una razón se llama *antecedente,* y también dividendo o numerador.

El segundo término se llama *consecuente,* y también divisor o denominador.

180. Principios relativos a las razones. **1º *El valor de una razón no se altera cuando se multiplican sus dos términos por un mismo factor, o se dividen entre un mismo divisor.***

Este principio ya se demostró al tratarse de los quebrados (Nº 145).

Todas las propiedades relativas a los quebrados, se aplican igualmente a las razones.

2º *En una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes dividida entre la de los consecuentes, es igual a cada una de las razones.*

Sean $\frac{m}{n}$, $\frac{r}{s}$, $\frac{u}{v}$ las razones iguales, y c el valor de cada una de ellas.

De $\frac{m}{n} = \frac{r}{s} = \frac{u}{v} = c$, se saca: $m = cn$; $r = cs$; $u = cv$.

Sumando miembro a miembro y poniendo c en factor común, se obtiene:

$$m + r + u = cn + cs + cv = c(n + s + v).$$

Dividiendo entre $n + s + v$, resulta:

$$\frac{m+r+u}{n+s+v} = c.$$

O sea:

$$\frac{m+r+u}{n+s+v} = \frac{m}{n} = \frac{r}{s} = \frac{u}{v}.$$

181. Proporción. *Se llama proporción la igualdad de dos razones;* v. gr.:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s}, \text{ o bien: } m : n = r : s.$$

Esta proporción se lee: m es a n como r es a s, o también: m entre n igual a r entre s.

En una proporción, el primero y cuarto términos se llaman *extremos,* el segundo y tercero, *medios.*

182. Proporción continua. *Se llama proporción continua, aquella cuyos medios son iguales;* v. gr.:

$$\frac{16}{12} = \frac{12}{9} \text{ y } \frac{a}{b} = \frac{b}{m}.$$

183. Media proporcional o media geométrica. *Cada uno de los términos iguales de una proporción continua se llama media proporcional o media geométrica de los términos restantes de la proporción;* así, en la proporción continua $\frac{16}{12} = \frac{12}{9}$, 12 es media proporcional de 16 y 9.

184. Tercera proporcional. *Se llama tercera proporcional cada uno de los términos desiguales de una proporción continua;* v. gr.: 9 es tercera proporcional de 16 y 12, en la misma proporción que se acaba de citar.

185. Cuarta proporcional. *Cada uno de los términos de una proporción no continua se llama cuarta proporcional respecto de los otros tres;* así, en la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, x es cuarta proporcional de a, b y c.

186. Importancia del estudio de las proporciones. Es muy importante el conocimiento de los principios relativos a las proporciones, porque mediante su acertada aplicación, pueden resolverse muchos problemas importantes, como son, en Aritmética, los relacionados con la proporcionalidad, ya sea directa o inversa, las reglas de interés, descuento y compañía, etc.; los que se refieren a muchas propiedades de las figuras, tanto en Geometría plana como del espacio; los relacionados con las palancas en Física; la reproducción de figuras a escala, ya sean dibujos, ya sean mapas, etc. Apenas habrá ciencia física o matemática en que no se haga aplicación de alguna de las propiedades de las proporciones.

187. Propiedad fundamental de las proporciones. *En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

Sea la proporción $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$.

Reduciendo las dos razones a igual denominador, se tiene:

$$\frac{ms}{ns} = \frac{nr}{ns}.$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por ns, resulta:

$$ms = nr.$$

188. Consecuencias de esta propiedad. 1ª *En una proporción, se puede calcular un término cualquiera, conocidos los otros tres.*

Efectivamente, de la proporción $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$, se deduce: $ms = nr$.

Despejando sucesivamente cada uno de los factores de esta igualdad, resulta:

$$m = \frac{nr}{s}\ ;\quad s = \frac{nr}{m}\ ;\quad n = \frac{ms}{r}\ ;\quad r = \frac{ms}{n};$$

es decir, *cada extremo es igual al producto de los medios, dividido entre el otro extremo, y cada medio es igual al producto de los extremos, dividido entre el otro medio.*

2ª *En una proporción continua, se puede calcular la media proporcional, conocidos los otros dos términos.*

En efecto, de la proporción $\frac{m}{n} = \frac{n}{r}$, se deduce: $n^2 = mr$.

Esta igualdad indica que se ha de buscar un número que, multiplicado por sí mismo, dé el producto de los dos términos conocidos.

Dicho número se llama *raíz cuadrada*, y se determina conforme a las reglas de la Aritmética, si se trata de valores numéricos, o dividiendo entre 2 los exponentes, si los valores son literales, ya que esta operación es inversa de la elevación a potencia.

Como en Aritmética, se emplea el signo $\sqrt{\ }$, que se llama *radical*.

Se tiene pues: $$n = \sqrt{mr}.$$

La media proporcional entre dos números dados es igual a la raíz cuadrada de su producto.

3ª *Toda proporción puede escribirse de cuatro maneras diferentes.*

Así, la proporción $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$ puede escribirse:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s},\quad \frac{m}{r} = \frac{n}{s},\quad \frac{n}{m} = \frac{s}{r},\quad \frac{r}{m} = \frac{s}{n}.$$

La segunda se ha obtenido permutando los medios de la primera y las dos restantes se han formado tomando, respectivamente, la recíproca de cada razón de las dos primeras.

Efectivamente, en cada caso se tiene: $ms = nr$.

4ª *Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, los dos primeros pueden ser extremos o medios de una proporción, y los otros dos, medios o extremos.*

Sean los productos iguales $ms = nr$.

Dividiendo ambos miembros entre ns, se obtiene:

$$\frac{ms}{ns} = \frac{nr}{ns}.$$

Suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s}\ ;\ \text{o permutando:}\ \frac{n}{m} = \frac{s}{r}.$$

189. Otras propiedades. 1ª *En una proporción, la suma de los dos primeros términos es al segundo, como la suma de los dos últimos es al cuarto.*

Sea la proporción $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$. Añadiendo 1 a cada razón, se tiene:

$$\frac{m}{n} + 1 = \frac{r}{s} + 1.$$

Incorporando el 1 a cada razón, resulta:

$$\frac{m+n}{n} = \frac{r+s}{s}.$$

2ª *En una proporción, la suma de los dos primeros términos es a la suma de los dos últimos, como el segundo es al cuarto.*

Permutando los medios en la igualdad anterior, se obtiene:

$$\frac{m+n}{r+s} = \frac{n}{s}.$$

3ª *En una proporción, la diferencia de los dos primeros términos es al segundo, como la diferencia de los dos últimos es al cuarto.*

Sea la proporción $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$. Restando 1 de cada razón, resulta:

$$\frac{m}{n} - 1 = \frac{r}{s} - 1,$$

$$\frac{m-n}{n} = \frac{r-s}{s}.$$

4ª *En una proporción, la diferencia de los dos primeros términos es a la diferencia de los dos últimos, como el segundo es al cuarto.*

Permutando los medios en la igualdad anterior, se tiene:

$$\frac{m-n}{r-s} = \frac{n}{s}.$$

5ª *En una proporción, la suma de los dos primeros términos es a la suma de los dos últimos, como la diferencia de los dos primeros es a la diferencia de los dos últimos.*

Las proporciones $\frac{m+n}{r+s} = \frac{n}{s}$ y $\frac{m-n}{r-s} = \frac{n}{s}$ debidas a las propiedades 2ª y 4ª, tienen los segundos miembros iguales; luego los primeros lo son también.

$$\frac{m+n}{r+s} = \frac{m-n}{r-s}.$$

6ª *En una proporción, la suma de los dos primeros términos es a su diferencia, como la suma de los dos últimos es a su diferencia.*

Permutando los medios en la igualdad anterior, resulta:

$$\frac{m+r}{m-n} = \frac{r+s}{r-s}.$$

7ª *En una proporción, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como la diferencia de los antecedentes es a la diferencia de los consecuentes.*

De la proporción $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$ puede deducirse $\frac{m}{r} = \frac{n}{s}$, permutando los medios.

Aplicando la propiedad 5ª a esta nueva proporción, se tiene:

$$\frac{m+r}{n+s} = \frac{m-r}{n-s}.$$

8ª *En una proporción, la suma de los antecedentes es a su diferencia, como la suma de los consecuentes es a su diferencia*

Permutando los medios en la igualdad anterior, resulta:

$$\frac{m+r}{m-r} = \frac{n+s}{n-s}.$$

EJERCICIO 36

Escribir la razón de:

1. $\frac{a}{x-a}$ a $\frac{3a}{(x-a)^2}$.
2. $\frac{x^3}{n^2-1}$ a $\frac{x^3}{(n-1)^2}$.
3. $\frac{m(m-1)}{2}$ a $\frac{m(m-1)(m-2)}{6}$.
4. $\frac{x-1}{4}$ a $\frac{x+3}{5}$.

Poner en forma de proporción los siguientes productos:

5. $16 \times 9 = 18 \times 8$.
6. $27 \times 12 = 36 \times 9$.
7. $ad = bc$.
8. $mn = t^2$.
9. $xy = (x+y)(x-y)$.
10. $pq = r^2 - s^2$.

Hallar la incógnita en las proporciones siguientes:

11. $\frac{x}{27}=\frac{3}{9}$.
12. $\frac{12}{x}=\frac{44}{22}$.
13. $\frac{63}{9}=\frac{126}{x}$.
14. $\frac{56}{112}=\frac{98}{197-x}$.
15. $\frac{64}{x}=\frac{x}{81}$.
16. $\frac{x}{121}=\frac{625}{x}$.
17. $\frac{x+a}{x+b}=\frac{3x+1}{3x-1}$
18. $\frac{65}{18}=\frac{36+x}{72}$.

Volver a la forma $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ cada una de las proporciones siguientes:

19. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.
20. $\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$.
21. $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$.
22. $\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}$.
23. $\frac{a+2c}{b+2d}=\frac{3a-4c}{3b-4d}$.
24. $\frac{4a+7c}{4b+7d}=\frac{9c-6a}{9d-6b}$.

25. ¿Cómo se obtiene $\frac{2x-3}{3}=\frac{17}{9}$ de $\frac{2x}{3}=\frac{26}{9}$?

Hallar el valor de x en las proporciones siguientes:

26. $\frac{14-x}{x}=\frac{12}{26}$.
27. $\frac{x+7}{x-7}=\frac{20}{17}$.
28. $\frac{2x-3}{2x+3}=\frac{5}{7}$.

Dada la proporción $\frac{n}{m}=\frac{s}{r}$, demuéstrense las igualdades siguientes:

29. $\frac{n+m}{m}=\frac{s+r}{r}$.
30. $\frac{n-m}{m}=\frac{s-r}{r}$.
31. $\frac{m-r}{r}=\frac{n-s}{s}$.
32. $\frac{m+r}{r}=\frac{n+s}{s}$.
33. $\frac{m+r}{n+s}=\frac{r}{s}=\frac{m}{n}$.
34. $\frac{m-r}{n-s}=\frac{r}{s}=\frac{m}{n}$.

35. **Sabiendo que $x=\frac{2b^2-a^2+c^2}{3a}$, y que $y=\frac{2a^2-b^2+c^2}{3b}$, probar que:**

$$\frac{a}{b+y}=\frac{b}{a+x}.$$

36. **Comprobar la siguiente igualdad:**

$$\frac{\frac{a}{b+c}-\frac{a}{b+2c}}{\frac{a}{b+2c}-\frac{a}{b+3c}}=\frac{\frac{a}{b+c}}{\frac{a}{b+3c}}.$$

37. **Demostrar que se puede obtener la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ de la igualdad:**

$$\frac{m(a+b)+n(c+d)}{mb+nd}=\frac{p(a+b)-q(c+d)}{pb-qd}.$$

(Réstese cada denominador de su numerador, y multiplíquense los medios y los extremos entre sí).

II. APLICACIONES DE LAS PROPORCIONES

190. Tangente y cotangente. 1º Supóngase que se quiere calcular la altura de un árbol AB que a determinada hora proyecta una sombra AC (fig. 10) de 12 m de longitud, sabiendo que a la misma hora una varilla $A'B'$ de 2 m proyecta una sombra $A'C'$ de 2.50 m.

Para conocer la altura bastará despejarla de la siguiente proporción:

$$\frac{\text{altura del árbol}}{\text{sombra del árbol}}=\frac{\text{altura de la varilla}}{\text{sombra de la varilla}},$$

o sea: $\frac{AB}{CA}=\frac{A'B'}{C'A'}$.

Despejando AB se obtiene:

$$AB=CA\times\frac{A'B'}{C'A'}$$
$$=12\times\frac{2}{2.50}$$
$$=12\times.80=9.60\text{ m}.$$

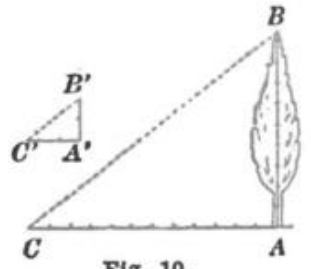


Fig. 10.

Si se conoce la sombra proyectada por otro árbol, supuestos siempre el mismo lugar y la misma hora, para saber cuál es su altura bastará multiplicar .80 m por la longitud de la sombra, es decir, en cada caso se multiplicará la razón conocida $\frac{2}{2.50}=.80$, por la longitud de la sombra.

A la razón $\frac{\text{A'B'}}{\text{C'A'}}$ *del cateto* A'B' *del triángulo rectángulo* C'A'B' *al cateto* C'A', *se la llama tangente del ángulo* A'C'B' que, en

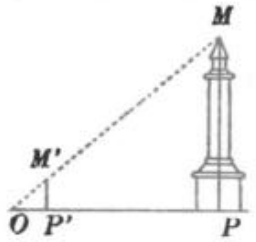
el caso considerado, representa la altura del sol sobre el horizonte.

En un triángulo rectángulo, un cateto es igual al otro cateto multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al cateto buscado.

2º Se desea conocer la distancia del punto O al pie P del monumento PM de 46 m de alto (fig. 11). Para eso, se ha colocado una varilla vertical $P'M'$ de 3 m de alto, en tal forma que los puntos O, M' y M queden alineados, y se ha medido la distancia OP', que ha resultado ser de 3.30 m.

La distancia pedida puede calcularse por medio de la siguiente proporción:

$$\frac{\text{dist. de } O \text{ al pie del monumento}}{\text{altura del monumento}} = \frac{\text{dist. de } O \text{ al pie de la varilla}}{\text{altura de la varilla}},$$



o sea: $\frac{OP}{PM} = \frac{OP'}{P'M'}$.

Despéjese OP, y se obtiene:

$$OP = PM \times \frac{OP'}{P'M'}$$
$$= 46 \times \frac{3.30}{3}$$
$$= 46 \times 1.10 = 50.60 \text{ m.}$$

A la razón $\frac{OP'}{P'M'}$ *del cateto* OP' *al cateto* $P'M'$ *se la llama cotangente del ángulo* $M'OP'$.

En un triángulo rectángulo, un cateto es igual al otro cateto multiplicado por la cotangente del ángulo agudo adyacente al cateto buscado.

En un triángulo rectángulo un cateto es igual al otro cateto, multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al cateto buscado, o por la cotangente del ángulo agudo aydacente a dicho cateto.

191. Seno y coseno. 1º Supóngase que se quiere saber a qué altura AB se podrá alcanzar con una escalera de 9 m, si con otra $C'B'$, de 1.50 m, se llega al punto B', tal que $A'B' =$ 1.38 m, admitiendo que se da a la escalera mayor igual inclinación que a la pequeña (fig. 12).

La altura pedida puede calcularse por medio de la siguiente proporción:

$$\frac{\text{alt. alcanzada con la esc. } CB}{\text{largo de la escalera } CB} = \frac{\text{alt. alcanzada con la esc. } C'B'}{\text{largo de la escalera } C'B'},$$

es decir: $\frac{AB}{CB} = \frac{A'B'}{C'B'}$.

Despejando AB, se obtiene:

$$AB = CB \times \frac{A'B'}{C'B'}$$
$$= 9 \times \frac{1.38}{1.50}$$
$$= 9 \times .92 = 8.28 \text{ m.}$$

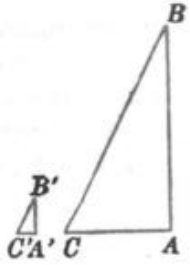


Fig. 12.

Si se trata de otras escaleras, para saber qué altura se puede alcanzar con cada una de ellas, basta multiplicar su longitud por .92, en el supuesto de que se conserve siempre igual inclinación con respecto del suelo.

A la razón $\frac{A'B'}{C'B'}$ *del cateto* $A'B'$ *a la hipotenusa* $C'B'$, *se la llama seno del ángulo* $A'C'B'$ que, en el problema considerado, es el ángulo de inclinación de la escalera.

En un triángulo rectángulo un cateto es igual a la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto al cateto buscado.

2º La misma figura puede servirnos para calcular la distancia AC del pie de la pared al de la escalera. Para obtenerla, mídase primero la distancia $A'C'$, que resulta ser de 1.16 m; luego establézcase la proporción:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'};$$

de donde, despejando AC:

$$AC = 9 \times \frac{1.16}{1.50} = 9 \times .773 = 6.957 \text{ m.}$$

A la razón $\frac{A'C'}{C'B'}$ *del cateto* $A'C'$ *a la hipotenusa* $C'B'$, *se la llama coseno del ángulo* $A'C'B'$.

En un triángulo rectángulo un cateto es igual a la hipotenusa multiplicada por el coseno del ángulo agudo adyacente al cateto buscado.

Los dos resultados anteriores pueden resumirse diciendo: *En un triángulo rectángulo un cateto es igual a la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto al cateto buscado, o por el coseno del ángulo agudo adyacente a dicho cateto.*

Notación. — Las cuatro palabras: seno, coseno, tangente y cotangente se abrevian, respectivamente, *sen, cos, tan, cot.*

192. **Tablas.** Tratándose de la sombra del árbol y de la escalera, en cada caso el ángulo ACB tiene cierto valor, lo mismo que el ángulo POM, en lo que se refiere al monumento. El valor de las razones consideradas varía con el ángulo.

Se han calculado *tablas* especiales en que constan los valores de cada una de las cuatro razones citadas, seno, coseno, tangente y cotangente, valores que corresponden a los ángulos que en aquéllas se indican.

Aplicando los principios enunciados en los números 190 y 191, se resuelven, con ayuda de esas tablas, problemas muy interesantes.

193. **Aplicaciones.** **1º ¿Cuál es el lado y la apotema de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 2.5 cm de radio?**

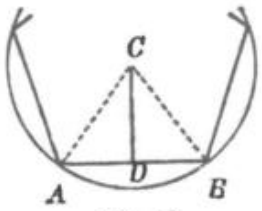


Fig. 13.

En el triángulo rectángulo ADC (fig 13), AD es la mitad del lado pedido; se tiene:

$$AD = AC \times \text{sen } ACD. \qquad (1)$$

El ángulo ACD es la mitad del ángulo ACB, y éste es la quinta parte de 360°; por tanto:

$$\text{áng. } ACD = \tfrac{1}{2} ACB = \frac{360}{10} = 36°.$$

Sustitúyase en (1):

$$AD = AC \times \text{sen } 36°$$
$$= 2.5 \times .5878$$
$$= 1.4695 = 1.47 \text{ cm.}$$

Como el lado AB es doble de AD, resulta:

$$AB = AD \times 2 = 1.47 \times 2 = 2.94 \text{ cm.}$$

En la misma figura, CD es la apotema pedida. Se tiene:

$$CD = AC \times \cos ACD = AC \times \cos 36°$$
$$= 2.5 \times .8090 = 2.02 \text{ cm.}$$

Ang.	Sen	Cos	Tan	Cot	Ang.	Sen	Cos	Tan	Cot
1°	.0175	.9998	.0175	57.29	46°	.7193	.6947	1.036	.9657
2°	.0349	.9994	.0349	28.64	47°	.7314	.6820	1.072	.9325
3°	.0523	.9986	.0524	19.08	48°	.7431	.6691	1.111	.9004
4°	.0698	.9976	.0699	14.30	49°	.7547	.6561	1.150	.8693
5°	.0872	.9962	.0875	11.43	50°	.7660	.6428	1.192	.8391
6°	.1045	.9945	.1051	9.514	51°	.7771	.6293	1.235	.8098
7°	.1219	.9925	.1228	8.144	52°	.7880	.6157	1.280	.7813
8°	.1392	.9903	.1405	7.115	53°	.7986	.6018	1.327	.7536
9°	.1564	.9877	.1584	6.314	54°	.8090	.5878	1.376	.7265
10°	.1736	.9848	.1763	5.671	55°	.8192	.5736	1.428	.7002
11°	.1908	.9816	.1944	5.145	56°	.8290	.5592	1.483	.6745
12°	.2079	.9781	.2126	4.705	57°	.8387	.5446	1.540	.6494
13°	.2250	.9744	.2309	4.331	58°	.8480	.5299	1.600	.6249
14°	.2419	.9703	.2493	4.011	59°	.8572	.5150	1.664	.6009
15°	.2588	.9659	.2679	3.732	60°	.8660	.5000	1.732	.5774
16°	.2756	.9613	.2867	3.487	61°	.8746	.4848	1.804	.5543
17°	.2924	.9563	.3057	3.271	62°	.8829	.4695	1.881	.5317
18°	.3090	.9511	.3249	3.078	63°	.8910	.4540	1.963	.5095
19°	.3256	.9455	.3443	2.904	64°	.8988	.4384	2.050	.4877
20°	.3420	.9397	.3640	2.747	65°	.9063	.4226	2.145	.4663
21°	.3584	.9336	.3839	2.605	66°	.9135	.4067	2.246	.4452
22°	.3746	.9272	.4040	2.475	67°	.9205	.3907	2.356	.4245
23°	.3907	.9205	.4245	2.356	68°	.9272	.3746	2.475	.4040
24°	.4067	.9135	.4452	2.246	69°	.9336	.3584	2.605	.3839
25°	.4226	.9063	.4663	2.145	70°	.9397	.3420	2.747	.3640
26°	.4384	.8988	.4877	2.050	71°	.9455	.3256	2.904	.3443
27°	.4540	.8910	.5095	1.963	72°	.9511	.3090	3.078	.3249
28°	.4695	.8829	.5317	1.881	73°	.9563	.2924	3.271	.3057
29°	.4848	.8746	.5543	1.804	74°	.9613	.2756	3.487	.2867
30°	.5000	.8660	.5774	1.732	75°	.9659	.2588	3.732	.2679
31°	.5150	.8572	.6009	1.664	76°	.9703	.2419	4.011	.2493
32°	.5299	.8480	.6249	1.600	77°	.9744	.2250	4.331	.2309
33°	.5446	.8387	.6494	1.540	78°	.9781	.2079	4.705	.2126
34°	.5592	.8290	.6745	1.483	79°	.9816	.1908	5.145	.1944
35°	.5736	.8192	.7002	1.428	80°	.9848	.1736	5.671	.1763
36°	.5878	.8090	.7265	1.376	81°	.9877	.1564	6.314	.1584
37°	.6018	.7986	.7536	1.327	82°	.9903	.1392	7.115	.1405
38°	.6157	.7880	.7813	1.280	83°	.9925	.1219	8.144	.1228
39°	.6293	.7771	.8098	1.235	84°	.9945	.1045	9.514	.1051
40°	.6428	.7660	.8391	1.192	85°	.9962	.0872	11.43	.0875
41°	.6561	.7547	.8693	1.150	86°	.9976	.0698	14.30	.0699
42°	.6691	.7431	.9004	1.111	87°	.9986	.0523	19.08	.0524
43°	.6820	.7314	.9325	1.072	88°	.9994	.0349	28.64	.0349
44°	.6947	.7193	.9657	1.036	89°	.9998	.0175	57.29	.0175
45°	.7071	.7071	1.000	1.000	90°	1.000	.0000	∞	.0000

2º ¿Cuánto mide el lado de un eneágono (polígono de nueve lados) regular circunscrito a una circunferencia de radio 2.5 cm?

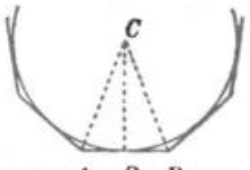


Fig. 14.

En el triángulo rectángulo ADC (fig. 14), AD es la mitad del lado pedido; se tiene:

$$AD = DC \times \tan ACD. \quad (2)$$

El ángulo ACD es la mitad del ángulo ACB, y éste es la novena parte de 360°; por tanto:

$$ACD = \frac{1}{2} ACB = \frac{360}{18} = 20°.$$

Sustituyendo este valor en (2) se obtiene:

$$AD = 2.5 \times \tan 20° = 2.5 \times .3640 = .91.$$

Como el lado AB es doble de AD, resulta:

$$AB = AD \times 2 = .91 \times 2 = 1.82 \text{ cm.}$$

3º El lado de un dodecágono (polígono de doce lados) regular circunscrito a una circunferencia, mide 1.6 cm. ¿Cuál es el radio de la circunferencia?

En el triángulo rectángulo ADC (fig. 15), AD es la mitad del lado dado; se tiene:

$$CD = AD \times \cot ACD. \quad (3)$$

El ángulo ACB es $\frac{1}{12}$ de 360° = 30°;

por tanto: $ACD = \frac{30}{2} = 15°$.

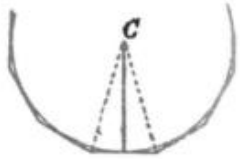


Fig. 15.

Sustitúyase en (3), y se obtiene:

$$CD = AD \times \cot 15° = .8 \times 3.732 = 2.99 = 3 \text{ cm.}$$

EJERCICIO 37

1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 m, y uno de los ángulos agudos es de 38°. ¿Cuál es la longitud de cada cateto?

2. Un terreno de forma rectangular está atravesado diagonalmente por una vereda de 235 m de largo. ¿Cuál es la longitud del perímetro del terreno si la diagonal forma con la base un ángulo de 34°?

3. ¿Cuánto mide el lado del decágono regular inscrito en una circunferencia de 2 cm de radio? ¿Cuánto mide la apotema?

4. ¿Cuál es el área de la superficie del pentedecágono (polígono de quince lados) regular inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio?

5. Para conocer la anchura BC de un río, se ha tomado, en la orilla, una distancia $AB = 260$ m perpendicularmente a BC, y se ha medido el ángulo CAB, que ha resultado ser de 35° (fig. 16). Calcúlese BC.

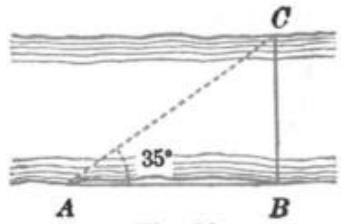


Fig. 16

6. Una pirámide pentagonal regular tiene 3 cm de lado. ¿Cuánto mide la altura, si cada cara lateral forma con la base un ángulo de 65°? ¿Cuál es el volumen de esa pirámide, si se obtiene tomando un tercio del producto del área de la base por la altura?

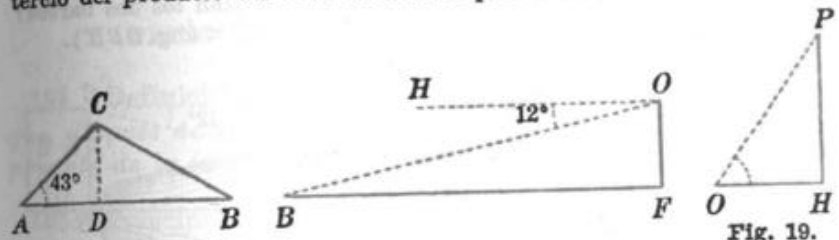


Fig. 19.

7. En el triángulo ABC, la base es de 48 m; el lado AC mide 25 m y el ángulo CAB es de 43°. ¿Cuál es el área de la superficie del triángulo? (fig. 17).

8. La visual a un barco desde un faro FO de 50 m de alto, forma con la visual horizontal un ángulo de 12° (fig. 18). ¿A qué distancia del pie del faro se halla el barco?

9. Un cordón OP de 65 m de largo sujeta un papalote, y forma con la horizontal un ángulo de 55°. ¿A qué altura está el papalote, si se admite que el cordón queda bien estirado y forma una recta? (fig. 19).

10. A 60 m del pie de una torre, la visual al punto más alto de la torre forma con la horizontal un ángulo de 20°. ¿Qué altura tiene la torre?

11. Un monumento PM tiene 25 m de altura. Un observador colocado en A (fig. 20), mide el ángulo MAP y encuentra que es de 20°; otro observador, situado en B, encuentra que el ángulo MBP es de 38°. ¿Qué distancia hay de A a B?

12. Para conocer la altura de una columna y de una estatua colocada sobre ella, se ha medido una distancia CA de 40 m y los ángulos CAE y CAS, cuyos valores son, respectivamente, 21° y 25° (fig. 21). ¿Cuál es la altura de la columna y cuál la del monumento?

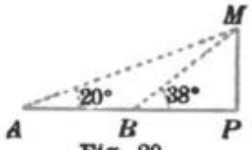


Fig. 20.

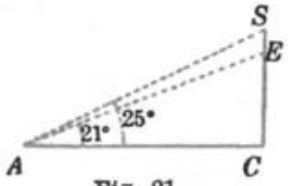


Fig. 21.

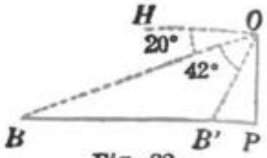


Fig. 22.

13. Desde un cerrito de 80 m de altura y situado a orillas del mar, se ven dos botes, B y B' en la misma dirección (fig. 22). El ángulo HOB es de 20°, y BOB' es de 42°. ¿De cuánto distan los dos barcos? (Nótese que áng. $PB'O$ = áng. HOB', y áng. HOB = áng. OBB').

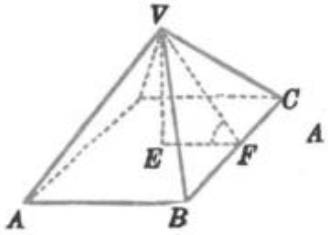


Fig. 23.

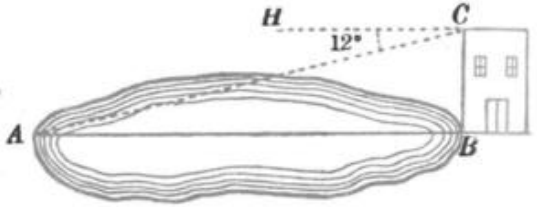


Fig. 24.

14. La pirámide de Cheops o Gran Pirámide de Egipto (fig. 23), tiene por base un cuadrado de 232.80 m de lado, y cada cara lateral forma con el plano de la base un ángulo de 52° ¿Qué altura tiene la pirámide?

15. La altura BC de una casa construída a orillas de un estanque es de 14 m. La visual horizontal HC (fig. 24) forma con la visual CA un ángulo de 12°? ¿Cuánto mide la longitud AB del estanque?

SEGUNDA PARTE

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

1

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

I. PRINCIPIOS RELATIVOS A SU RESOLUCION

194. Definición. — *Ecuación de primer grado es aquella en que, después de efectuadas todas las reducciones posibles, el exponente de la incógnita es* 1.

195. Principios relativos a las ecuaciones. Según lo expuesto en el Nº 27, *el valor de la incógnita de una ecuación no se altera:*

1º *Cuando se suma, o se resta, un mismo número a cada uno de sus miembros.*

2º *Cuando se multiplica cada uno de sus miembros por un mismo número finito y diferente de cero, o se dividen ambos entre un mismo divisor, también finito y no igual a cero.*

196. Ejemplos. 1º Resolver la ecuación: $5x - 3 = 2x + 12$.

Ecuación dada:	$5x - 3 =$		$2x + 12$
Súmese 3 a cada miembro:	$+ 3 =$		$+ 3$
	$5x$	$=$	$2x + 15$
Réstese $2x$ de cada miembro:	$- 2x$	$= - 2x$	
	$3x$	$=$	$+ 15$
Divídase entre 3:	x	$=$	$15 : 3 = 5.$

COMPROBACIÓN: $5 \times 5 - 3 = 2 \times 5 + 12$

$22 = 22.$

2º Resolver la ecuación: $\frac{5x}{2} + 4 = x + 13$.

Multiplíquense ambos miembros de esta ecuación por 2, para darle forma entera:

$$\begin{array}{lrl} & 5x + 8 = & 2x + 26 \\ \text{Réstese 8 de cada miembro:} & -\ 8 = & -\ 8 \\ \hline & 5x = & 2x + 18 \\ \text{Réstese } 2x \text{ de cada miembro:} & -\ 2x = & -\ 2x \\ \hline & 3x = & 18 \\ \text{Divídase entre 3:} & x = & 18 : 3 = 6. \end{array}$$

Comprobación: $\frac{5 \times 6}{2} + 4 = 6 + 13$

$19 = 19.$

197. Transposición de términos. *Puede suprimirse un término en un miembro cualquiera de una ecuación, con tal de agregar su simétrico en el otro miembro.*

Esto equivale a afirmar que puede pasarse un término de un miembro a otro, pero cambiando su signo. A esto se llama *transposición de términos.*

198. Intercambio de miembros. **Como en toda igualdad se pueden *intercambiar* los miembros, generalmente se toma como *primer miembro* de una ecuación el que contiene la *incógnita*, pues de este modo se facilita su resolución.**

Así, las ecuaciones: $19 = 3n - 2$, y $35 = 4x + 3$,
conviene escribirlas: $3n - 2 = 19$, y $4x + 3 = 35$.

199. Cambio de signos. ***En una ecuación cualquiera puede cambiarse el signo a cada uno de sus términos, lo cual equivale a multiplicar sus dos miembros por*** -1.

La ventaja de tal cambio puede verse en los ejemplos siguientes:

Forma original:	*Forma preferible:*
$-7x + 8 = -48;$	$7x - 8 = 48.$
$-9x - 3 = 4x - 42;$	$9x + 3 = -4x + 42.$

200. Supresión de paréntesis. Hay a veces ecuaciones en que intervienen *paréntesis*. En esos casos, debe comenzarse por removerlos, aplicando la *ley distributiva* de la multiplicación.

Ejemplos:

1º Resolver la ecuación: $16x - (9x - 5) - 33 = 0.$

$$\begin{aligned} 16x - 9x + 5 - 33 &= 0 \\ 7x - 28 &= 0 \\ 7x &= 28 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

2º Resolver la ecuación: $5x - 3(x - 4) + 2(x - 5) = 30.$

$$\begin{aligned} 5x - 3x + 12 + 2x - 10 &= 30 \\ 4x + 2 &= 30 \\ 4x &= 28 \\ x &= 7. \end{aligned}$$

201. Ecuaciones con raíz negativa. **Hay ecuaciones cuya raíz es un número *negativo*. Esto no implica dificultad ninguna, y se las resuelve como las ecuaciones que tienen por raíz un número *positivo*.**

Ejemplo: Resolver la ecuación: $8x + 6 - x = 5x - 12.$

$$\begin{aligned} 8x - x - 5x &= -12 - 6 \\ 2x &= -18 \\ x &= -9. \end{aligned}$$

Comprobación: $8(-9) + 6 - (-9) = 5(-9) - 12$

$$\begin{aligned} -72 + 6 + 9 &= -45 - 12 \\ -57 &= -57. \end{aligned}$$

EJERCICIO 38

Resolver las siguientes ecuaciones y comprobar:

1. $16x - 192 = 0.$
2. $80 + 2x - 136 = 0.$
3. $9x = 300 + 8x.$
4. $12v - 66 = v.$
5. $y = 12y - 44.$
6. $720y - 2\,157 = y.$
7. $48 - 3y = 5y.$
8. $504 - x - 14 = 0.$

9. $8x = x + 14$.
10. $x = 300 + 11x$.
11. $4x - 45 = 5 - 6x$.
12. $492 - 12x = 0$.
13. $14x - 5 - 6x = 3x$.
14. $7z + 9 = 100 - z - 3$.
15. $2r + 96 = 15r - 8 - 5r$.
16. $8y - 7 - 4y = 74 - 5y$.
17. $12m + 22 - 3m = 2m - 13$.
18. $6 - 4x - 10 = 22 + 4x$.
19. $5t - 3 - t + 8 = 2t - 7$.
20. $5c - 9 + c = 2c - 73$.
21. $v - 5(v - 20) = 0$.
22. $50z = 50 - 80(1 - z)$.
23. $495 = 2x - (1 - 9x) + 1$.
24. $2(25 + x) = 3(2x - 46)$.
25. $y - 2 = -5(39 - y) - 3$.
26. $3z - 5(100 - 3z) = 400$.
27. $4\,500 + 60v = 50(100 + v)$.
28. $3(4z - 3) - (39 + 60z) = 0$.
29. $0 = 2(6 - 9m) - (5 + 3m)$.
30. $84 - 19y = -7(60 + y)$.
31. $x - 4(99 - 11x) - 1\,584 = 0$.
32. $2x + 3 - (4x - 9) = 4$.
33. $50x + 11x = 4 + 51x$.
34. $(3x-2)4-7=(4x-5)5-22$.

35. $5(4x - 7) - (3x - 1)2 = -5$.
36. $9(x + 1) + 7(3 - x) - 38 = 0$.
37. $4(4x - 3) + 3(7 - 6x) = 16x$.
38. $6x - 17 = 13(x - 1) - 4$.
39. $4(x - 4) - 1 = 3(2x - 7)$.
40. $12(x - 3) + 1 = 6(x + 1) - 5$.
41. $33 = 3(10x - 5) + 2(3x - 10x)$.
42. $(y - 60) + 3y + 2(3y + y) = 0$.
43. $(2z - 7) - (7 - z) - 2z = 0$.
44. $7x - (3x + 2x) - x = 0$.
45. $40x - 1 - 60x + 6 = 0$.
46. $10z - 16(200 - z) = 960$.
47. $0 = 27 + v - 4(3 + v)$.
48. $40 - u - 5(12 - u) = 0$.
49. $4(120\,000 - z) + 10(120\,000 - z) = 1\,176\,000$.
50. $17x - (7x - 5) - (7\,000 - 20\,000) - 49\,000 = 0$.

51. $2x - (x + 2) - (x - 2) = x - 10$.
52. $4x - 3(3x - 1) + 12 = 15(x + 9)$.
53. $3(3z + 4) - 4(2z - 3) = 8$.
54. $10(2l + 5) - 8l = 56$.
55. $6(4r + 9) = 3(3r - 7)$.
56. $22 - 5(3 - 2n) = 2n - (5n + 32)$.
57. $8f + f(f - 6) = 57 - (17 - f^2)$.
58. $6m(m - 3) + 20 = 8 - 3m(5 - 2m)$.
59. $(x - 2)(x - 3) + 25 = (x + 1)^2 - 12$.
60. $y(y + 2) - 2(16 - y) = 7 - [15 - y(2 + y)]$.

II. ECUACIONES QUE CONTIENEN QUEBRADOS

202. **Resolución.** *Cuando se presenta una ecuación que contiene quebrados, se transforma en otra equivalente que tenga forma entera, multiplicando los dos miembros por el mínimo común múltiplo, de los denominadores.*

Ejemplos: 1º Resolver la ecuación: $\frac{3x}{4} - 35 = 100 - \frac{3x}{5}$.

El m. c. m. de 4 y 5 es su producto, 20.

Multiplíquense ambos miembros de la ecuación por 20:

$$\left(\frac{3x}{4} - 35\right)20 = \left(100 - \frac{3x}{5}\right)20$$
$$15x - 700 = 2\,000 - 12x$$
$$27x = 2\,700$$
$$x = 100.$$

Comprobación: $\frac{3 \times 100}{4} - 35 = 100 - \frac{3 \times 100}{5}$

$$75 - 35 = 100 - 60$$
$$40 = 40.$$

2º Resolver la ecuación: $\frac{x}{2} - \frac{5x}{7} = -54 + \frac{3x}{4}$.

El m. c. m de 2, 7 y 4 es 28.

Se multiplican ambos miembros de la ecuación por 28:

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{5x}{7}\right)28=\left(-54+\frac{3x}{4}\right)28$$
$$14x-20x=-1\,512+21x$$
$$-27x=-1\,512$$
$$27x=1\,512$$
$$x=1\,512:27=56.$$

COMPROBACIÓN: $\frac{56}{2}-\frac{5\times 56}{7}=-54+\frac{3\times 56}{4}$

$$28-40=-54+42$$
$$-12=-12.$$

3º Resolver la ecuación: $\frac{x}{b}+\frac{x}{a-b}=\frac{a}{a+b}$.

El m. c. m. $(b,\ a-b,\ a+b)=b(a-b)(a+b)=b(a^2-b^2)$.

Multiplíquense ambos miembros de la ecuación por $b(a^2-b^2)$:

$$\left(\frac{x}{b}+\frac{x}{a-b}\right)b(a^2-b^2)=\frac{a}{a+b}\times b(a^2-b^2)$$
$$x(a^2-b^2)+bx(a+b)=ab(a-b)$$
$$x(a^2-b^2+ab+b^2)=ab(a-b)$$
$$x(a^2+ab)=ab(a-b)$$
$$x=\frac{ab(a-b)}{a^2+ab}=\frac{b(a-b)}{a+b}.$$

COMPROBACIÓN: $\frac{b(a-b)}{b(a+b)}+\frac{b(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a}{a+b}$

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b}{a+b}=\frac{a}{a+b}$$
$$\frac{a-b+b}{a+b}=\frac{a}{a+b}$$
$$\frac{a}{a+b}=\frac{a}{a+b}.$$

4º Resolver la ecuación: $ax-\frac{a}{c}=cx-\frac{c}{a}$.

El m. c. m. $(a,\ c)=ac$.

Se multiplican ambos miembros de la ecuación por ac:

$$\left(ax-\frac{a}{c}\right)ac=\left(cx-\frac{c}{a}\right)ac$$
$$a^2cx-a^2=ac^2x-c^2$$
$$a^2cx-ac^2x=a^2-c^2$$
$$x(a^2c-ac^2)=a^2-c^2$$

$$x(a-c)ac=a^2-c^2$$
$$x=\frac{(a+c)(a-c)}{(a-c)ac}=\frac{a+c}{ac}.$$

COMPROBACIÓN: $a\times\frac{a+c}{ac}-\frac{a}{c}=c\times\frac{a+c}{ac}-\frac{c}{a}$.

Reduciendo a un común denominador y efectuando las operaciones indicadas, se obtiene:

$$\frac{a^2+ac-a^2}{ac}=\frac{ac+c^2-c^2}{ac}$$
$$\frac{ac}{ac}=\frac{ac}{ac}.$$

203. Observación. Cuando una ecuación se presenta en forma de *proporción*, es preferible igualar los productos de los medios y de los extremos, en vez de seguir el procedimiento que se acaba de exponer.

EJEMPLO: Resolver la ecuación: $\frac{x}{110-3x}=\frac{1}{2}$.

$$2x=110-3x$$
$$5x=110$$
$$x=22.$$

EJERCICIO 39

Resolver las ecuaciones siguientes:

1. $\frac{2x}{3}+5=\frac{x}{3}+11.$
2. $\frac{x}{7}+\frac{3x}{14}-2=\frac{x}{14}+2.$
3. $83+x=\frac{2x}{5}+107.$
4. $\frac{x}{3}+7=62.$
5. $84-x=\frac{2x}{5}.$
6. $3+x=\frac{27+x}{4}.$
7. $x=\frac{8(x+45)}{11}.$
8. $\frac{9x-48}{x}=5.$
9. $120=\frac{(x+100)12}{100}.$
10. $\frac{12-x}{x}=\frac{5}{7}.$
11. $\frac{x}{176-x}=\frac{3}{5}.$
12. $\frac{3x-17}{3x-7}=-1.$
13. $\frac{3x-17}{2x+8}=1.$
14. $\frac{4x-13}{3}=x-1.$
15. $\frac{x-5}{9}=\frac{x-25}{5}.$
16. $\frac{21}{5y}=\frac{22}{5}-3.$

17. $3v - 14 + \frac{2v+7}{3} = \frac{5v-7}{2}$.

18. $m - \frac{m}{2} = 6 + \frac{m}{8}$.

19. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{x+9\,700}{40}$.

20. $\frac{3x-1}{4} - \frac{2x-1}{5} = \frac{10x-13}{20}$.

21. $\frac{6}{x} - \frac{12}{2x} + \frac{144}{3x} = 4$.

22. $\frac{z}{3} + \frac{2z}{7} + \frac{z}{4} + 22 - z = 0$.

23. $y - \frac{4y}{5} + 39 = y + \frac{y}{2}$.

24. $\frac{3x-2}{2x-3} \times 5 = \frac{35}{3}$.

25. $x - \frac{3x}{4} + \frac{x-11}{2} \times \frac{4}{3} = 0$.

26. $\frac{5x-2}{6x+1} = \frac{5x+2}{6x-1}$.

27. $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = 7$.

28. $0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$.

29. $\frac{8x}{9} - \frac{5x}{6} - 12 = 0$.

30. $\frac{3x}{4} - \frac{3x}{5} - 18 = 0$.

31. $\frac{3x}{7} = 10 + \frac{x}{4}$.

32. $x - \left(\frac{4x}{5} + 15\right) = 0$.

33. $\frac{16y}{5} + \frac{3y}{2} = 43 + \frac{2y}{5}$.

34. $\frac{y}{2} + \frac{y}{4} + \frac{y}{7} = y - 12$.

35. $\frac{2v}{3} + 7 = v + 3 - \frac{v}{5}$.

36. $2z - 70 = -\left(\frac{z}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z}{6}\right)$

37. $\frac{4u}{5} + \frac{3u}{10} - \frac{u}{2} = 24$.

38. $u - \frac{2u}{3} + 44 = u + \frac{u}{4}$.

39. $\frac{2n}{3} + \frac{3n}{5} = \frac{9n}{15} + 40$.

40. $\frac{16y}{2} + \frac{3y}{5} = 43 + \frac{2y}{5}$.

41. $\frac{6}{x} - \frac{12}{2x} + \frac{144}{3x} = 4$.

42. $\frac{s}{4} + \frac{s}{8} + \frac{s}{7} = s - 27$.

Resolver las ecuaciones literales siguientes:

43. $\frac{1}{x-a} = \frac{3}{a-x}$.

44. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = c$.

45. $\frac{x-a}{b} - \frac{x-b}{a} = \frac{b}{a}$.

46. $\frac{x-b}{x-c} = \frac{a-b}{a-c}$.

47. $\frac{1}{ab} + 1 = \frac{1}{x} + \frac{ab}{x}$.

48. $x(a+b) = a^2 - b^2$.

49. $\frac{a}{x} - 2 = \frac{b}{x} - 5$.

50. $\frac{ax}{b} - \frac{cx}{d} = mn$.

51. $2b - \frac{c}{x} = \frac{mn}{x}$.

52. $\frac{x+2b}{2b-x} = b$.

53. $\frac{rx+s}{rx-s} = \frac{a}{b}$.

54. $b(b-x) = c(c-x)$.

55. $\frac{3cx}{c-d} - 2c = 5x$.

56. $\frac{2b+x}{2b-x} = \frac{5b+x}{5b-x}$.

57. $\frac{x-a}{x-2} = \frac{x-b}{x-1}$.

58. $\frac{ax+c}{c} - \frac{bx+c}{d} = 1$.

59. $\frac{23b-x}{5} + \frac{x-b}{7} - \frac{4b-x}{4} = 5b$.

60. $\frac{5y+3a}{3} + \frac{3y-4a}{7} = 43a - 5y$.

2

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

I. RESOLUCION DE PROBLEMAS

204. Problema. Una de las aplicaciones más importantes del Algebra, es la resolución de *problemas*. La notación algebraica, tan clara y concisa, facilita grandemente esa resolución.

Problema *es toda cuestión en que se tiene que hallar una o más cantidades desconocidas, relacionadas con otras que se conocen. A éstas se las llama* **datos,** *y a las primeras,* **incógnitas.**

En el enunciado de un problema se indica cómo se relacionan los datos con las incógnitas.

Lo primero que debe hacerse para resolver un problema, es representar la incógnita por medio de una de las últimas letras del alfabeto, generalmente la x, y luego expresar la relación que hay entre los datos y las incógnitas por medio de ecuaciones.

En este capítulo sólo se estudia la resolución de problemas cuyo planteo da lugar a *una ecuación de primer grado con una incógnita.*

La solución de la ecuación obtenida es, evidentemente, la solución del problema.

205. **Ejemplos.** 1º *En un número de dos dígitos, cuya suma es* 11, *el de las decenas sobrepasa en* 5 *al de las unidades. Hállese ese número.*

Dígito de las unidades: x.
Dígito de las decenas: $x + 5$.
Según el problema: $(x + 5) + x = 11$ (ecuación)

$$2x + 5 = 11$$
$$2x = 6$$
$$x = 3.$$

El número pedido es 83.

2º *¿Cuál es el número que, al aumentar en* 20, *se triplica?*

Número pedido: x.
El mismo aumentado en 20: $x + 20$.
Según el enunciado: $x + 20 = 3x$

$$2x = 20$$
$$x = 10.$$

3º *¿Cómo se pagaría una deuda de* \$ 700 *con* 52 *monedas de oro, unas de* \$ 20 *y otras de* \$ 10*?*

Número de monedas de \$ 20: x.
Número de monedas de \$ 10: $52 - x$.
Valor de las monedas de \$ 20: $20x$.
Valor de las monedas de \$ 10: $10(52 - x)$.
Resulta, pues: $20x + 10(52 - x) = 700$

$$20x + 520 - 10x = 700$$
$$10x = 180$$
$$x = 18.$$

La deuda se pagaría con 18 monedas de \$ 20 y 34 monedas de \$ 10.

Comprobación: $20 \times 18 + 10 \times 34 = 360 + 340 = \$\,700$.

4º *Una persona ha gastado la décima parte, los dos quintos y la cuarta parte de su dinero, y además,* \$ 25, *después de lo cual no le queda nada. ¿Cuánto tenía?*

Dinero que tenía: x.
Dinero gastado: $\frac{x}{10} + \frac{2x}{5} + \frac{x}{4} + 25$.
Ecuación: $x - \left(\frac{x}{10} + \frac{2x}{5} + \frac{x}{4} + 25\right) = 0$

$$20x - 2x - 8x - 5x - 500 = 0$$
$$5x = 500$$
$$x = \$\,100.$$

5º *Un padre de familia tiene* 40 *años, y su hijo,* 15. *¿Dentro de cuánto tiempo será la edad del padre el doble de la del hijo?*

Número de años pedido: x.
Edad del padre pasados x años: $40 + x$.
Edad del hijo pasados x años: $15 + x$.
Según el enunciado: $40 + x = 2(15 + x)$

$$x - 2x = 30 - 40$$
$$-x = -10$$
$$x = 10.$$

Dentro de 10 años la edad del padre será doble de la del hijo.

6º *Un tren sale de* A *para* B *con una velocidad de* 45 *km por hora. Una hora después sale otro tren del mismo punto y en la misma dirección que el anterior, con una velocidad de* 50 *km por hora. ¿Dentro de cuánto tiempo y a qué distancia de* A *alcanzará el segundo tren al primero?*

Tiempo pedido: x.
Recorrido por el 1er tren en x horas: $45x$.
Recorrido por el 2º tren en x horas: $50x$.

Cuando salió el segundo tren, el primero le llevaba 45 km de ventaja; se tiene pues la ecuación:

$$50x = 45 + 45x$$
$$5x = 45$$
$$x = 9.$$

El encuentro se hará 9 horas después de la salida del segundo tren.

Los trenes se encontrarán a $50 \times 9 = 450$ km del punto A.

7º *Un comerciante ha colocado dos capitales a interés simple: el primero al 4 % anual, y el segundo, que sobrepasa al primero en \$ 4 000, al 5 %. Hállense los dos capitales, sabiendo que, al cabo de un año, suman con sus intereses \$ 20 920.*

Primer capital: x.

Su interés en un año: $\frac{x \times 4}{100}$.

Segundo capital: $x + 4\,000$.

Su interés en un año: $\frac{(x + 4\,000)5}{100}$.

Ecuación: $x + \frac{x \times 4}{100} + x + 4\,000 + \frac{(x + 4\,000)5}{100} = 20\,920$

$$100x + 4x + 100x + 400\,000 + 5x + 20\,000 = 2\,092\,000$$

$$209x = 1\,672\,000$$

$$x = 8\,000.$$

Primer capital: \$ 8 000; segundo capital: \$ 12 000.

8º *A las* 12 *horas, las dos manecillas de un reloj están superpuestas. ¿A qué horas serán las superposiciones sucesivas en el intervalo* 12 *horas?*

La primera superposición, después de las 12, tendrá lugar entre la 1 y las 2; la segunda entre las 2 y las 3, y así sucesivamente. La décima superposición será entre las 10 y las 11, y a las 12 será la undécima superposición en el intervalo de 12 horas. El tiempo que media entre dos superposiciones consecutivas es, por tanto, igual a 12 horas divididas entre 11. Se tiene:

$$\frac{12}{11} = 1\ \frac{1}{11}\text{h} = 1\text{ h}\ \frac{60}{11}\text{m} = 1\text{ h}\ 5\frac{5}{11}\text{ m}.$$

Luego, las superposiciones son, sucesivamente:

1 h 5 $\frac{5}{11}$ m, 2 h 10 $\frac{10}{11}$ m, 3 h 16 $\frac{4}{11}$ m, 4 h 21 $\frac{9}{11}$ m, 5 h 27 $\frac{3}{11}$ m, 6 h 32 $\frac{8}{11}$ m, 7 h 38 $\frac{2}{11}$ m, 8 h 43 $\frac{7}{11}$ m, 9 h 49 $\frac{1}{11}$ m, 10 h 54 $\frac{6}{11}$ m, 12 h.

9º *Dividir el número* a *en tres partes, tales que la primera sea igual a la segunda multiplicada por* m, *y ésta, a la tercera multiplicada por* n.

Tercera parte: x.

Segunda parte: nx.

Primera parte: mnx.

Según el enunciado: $x + nx + mnx = a$

$$x(1 + n + mn) = a$$

$$x = \frac{a}{1 + n + mn}.$$

1ª p.: $\frac{amn}{1 + n + mn}$; **2ª p.:** $\frac{an}{1 + n + mn}$; **3ª p.:** $\frac{a}{1 + n + mn}$.

Si se atribuye a los datos valores numéricos, por ejemplo: $a = 120$, $m = 2$, $n = 3$, basta sustituir estos valores en las fórmulas anteriores; así se obtiene:

$$1^{\text{ª}} = \frac{120 \times 2 \times 3}{1 + 3 + 3 \times 2} = 72; \quad 2^{\text{ª}} = \frac{120 \times 3}{10} = 36; \quad 3^{\text{ª}} = \frac{120}{10} = 12.$$

10º *Un recipiente, alimentado por* 3 *llaves, puede ser llenado en* a *minutos por la primera, en* b *min. por la segunda y en* c *min. por la tercera. ¿Cuánto tiempo necesitan las tres llaves juntas para llenarlo?*

Tiempo que tardan las 3 llaves juntas: x.

La primera llena en x minutos: $\frac{1}{a} \times x = \frac{x}{a}$.

La segunda llena en x minutos: $\frac{1}{b} \times x = \frac{x}{b}$.

La tercera llena en x minutos: $\frac{1}{c} \times x = \frac{x}{c}$.

Según el enunciado: $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = 1$

$$\frac{bcx + acx + abx}{abc} = 1$$

$$bcx + acx + abx = abc$$

$$x(bc + ac + ab) = abc$$

$$x = \frac{abc}{bc + ac + ab}.$$

Si se da a las literales conocidas valores numéricos, por ejemplo: $a = 12$, $b = 15$ y $c = 20$, basta sustituir estos valores en la fórmula anterior, y así se obtiene:

$$x = \frac{12 \times 15 \times 20}{300 + 240 + 180} = 5 \text{ min.}$$

11º PROBLEMA DE LOS MÓVILES. — *Dos móviles se mueven, con velocidad uniforme, en una recta* X'X, (fig. 25), *y sus velocidades respectivas son* v *y* v'. *Sabiendo que el primero está en el*

punto P *cuando el segundo se halla en* P', *dígase en qué punto de* X'X *se llegarán a encontrar.*

Este problema presenta varios casos, según la posición de los puntos P y P' en la recta $X'X$, las velocidades respectivas y el sentido de dichas velocidades.

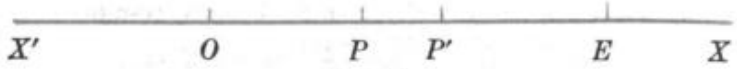


Fig. 25.

Sea O un punto fijo en la recta $X'X$, y P y P' los dos puntos, estando P' más alejado de O que el punto P.

Sean a y a' las distancias OP y OP'. Si los dos móviles van en el mismo sentido, de izquierda a derecha, el primero con velocidad v y el segundo con una velocidad v' menor que v, es evidente que los móviles se encontrarán a la derecha de P, en E, por ejemplo:

Distancia pedida OE: x.

Distancia PE recorrida por el 1er móvil: $x - a$.

Distancia $P'E$ recorrida por el 2º móvil: $x - a'$.

Siendo el espacio recorrido igual al producto de la velocidad por el tiempo, se tiene:

Para el primero: $x - a = vt$; de donde: $t = \frac{x-a}{v}$.

Para el segundo: $x - a' = v't$; de donde: $t = \frac{x-a'}{v'}$.

Igualando los valores de t: $\frac{x-a}{v} = \frac{x-a'}{v'}$

$$v'x - v'a = vx - va'$$
$$x(v' - v) = v'a - va'$$
$$x = \frac{v'a - va'}{v' - v}$$
$$x = \frac{va' - v'a}{v - v'}.$$

206. Aplicaciones. 1º Sean los valores siguientes:

$a = 40$ m; $a' = 60$ m; $v = 12$ m; $v' = 8$ m.

sustituyendo estos valores en la fórmula, se obtiene:

$$x = \frac{12 \times 60 - 8 \times 40}{12 - 8} = 100 \text{ m}.$$

Los móviles se encontrarán a 100 m a la derecha del punto O, después de haber pasado por los puntos P y P'.

2º Sean: $a = -40$ m; $a' = 50$ m; $v = 15$ m; $v' = -25$ m.

Según estos datos, el punto O se encuentra entre P y P', y los móviles se mueven en sentido contrario.

Sustituyendo estos nuevos valores en la fórmula, resulta:

$$x = \frac{15 \times 50 - (-25)(-40)}{15 - (-25)} = -6.25 \text{ m}.$$

Este resultado indica que el punto de encuentro se halla a la izquierda del punto O.

Evidentemente, podrían hacerse otras hipótesis, como considerar a positivo y a' negativo, etc.

II. DISCUSION DE PROBLEMAS

207. Definición. *Discutir* un problema, es establecer en qué condiciones es *posible*, *imposible* o *indeterminado*, e interpretar la solución de la ecuación que sirve para resolverlo.

Un problema cuya solución lleva a una ecuación de primer grado con una incógnita es *posible* cuando existe un solo valor bien determinado para la incógnita, y ese valor verifica la ecuación; es *imposible* cuando no la verifica ningún valor. Pero, si la solución lleva a una ecuación de primer grado con dos incógnitas, entonces el problema es *indeterminado*.

De este último caso se tratará en el capítulo siguiente.

208. Discusión del problema de los móviles. Al resolver el problema de los móviles se obtuvo la fórmula:

$$x = \frac{va' - v'a}{v - v'}.$$

Discutir este problema es examinar los diferentes valores que puede adquirir x, según los valores particulares de las cantidades.

$$a,\ a',\ v \text{ y } v'.$$

Pueden presentarse los siguientes casos:

$va' - v'a > 0$ {
- $v - v' > 0$; x es $+$. (1)
- $v - v' = 0$; $x = +\infty$. (2)
- $v - v' < 0$; x es $-$. (3)

$$va' - v'a = 0 \begin{cases} v - v' > 0; & x = 0. \quad (4) \\ v - v' = 0; & x = \frac{0}{0}. \quad (5) \\ v - v' < 0; & x = 0. \quad (6) \end{cases}$$

$$va' - v'a < 0 \begin{cases} v - v' > 0; & x \text{ es } -. \quad (7) \\ v - v' = 0; & x = -\infty. \quad (8) \\ v - v' < 0; & x \text{ es } +. \quad (9) \end{cases}$$

Como puede observarse, los 9 casos se reducen a 5, puesto que:

en el primero y el noveno, x es positivo;
en el segundo y el octavo, x es infinito;
en el tercero y el séptimo x es negativo;
en el cuarto y el sexto, x es nulo;
y en el quinto, x es indeterminado.

Hay que considerar estos cinco casos separadamente.

PRIMER CASO, o (1) y (9) del cuadro sinóptico.

El valor de x es positivo y bien determinado. Esto quiere decir que los dos móviles se encontrarán, y que el punto de encuentro E está situado a la derecha del punto O (fig. 25).

SEGUNDO CASO, o (2) y (8).

El valor de x es infinito, pues se reduce a la forma $x = \frac{m}{0}$.

Según (2) se tiene: $va' - v'a > 0$; y según (8): $va' - v'a < 0$.

Puesto que en ambos casos $v - v' = 0$, o sea, $v = v'$, se obtiene, dividiendo entre v:

$$a' - a > 0 \quad \text{y} \quad a' - a < 0;$$

de donde: $$a' > a \quad \text{y} \quad a' < a;$$

o combinando: $$a' \gtrless a.$$

Como los dos móviles tienen la misma velocidad y se mueven en el mismo sentido, puesto que en determinado instante se hallan en dos puntos distintos, P y P', guardarán siempre entre sí la misma distancia, o sea, no se encontrarán nunca, ya vayan los dos en el sentido positivo o en el negativo. El problema es *imposible*.

TERCER CASO, o (3) y (7).

El valor de x es negativo, pero es bien determinado y finito. Este valor indica que los dos móviles se encontrarán a la izquierda del punto O.

CUARTO CASO, o (4) y (6).

El valor de x es cero. Esto quiere decir que los móviles se han encontrado en el punto O.

QUINTO CASO, o (5).

Las velocidades son iguales y $va' - v'a = 0$. El valor de x toma la forma $\frac{0}{0}$, símbolo de *indeterminación*.

Según esto los puntos P y P' se confunden. En el mismo instante los dos móviles se hallan en el mismo punto P, se mueven en el mismo sentido y con la misma velocidad; por lo tanto estarán siempre juntos.

RESUMEN DE LA DISCUSIÓN.

1º $a'v - v'a \gtrless 0$ y $v \gtrless v'$; los móviles se encontrarán a la derecha del punto O.

2º $a'v - v'a \gtrless 0$ y $v = v'$; los móviles nunca se encontrarán.

3º $a'v - v'a \gtrless 0$ y $v \lesseqgtr v'$; los móviles se encontrarán a la izquierda del punto O.

4º $a'v - v'a = 0$ y $v \gtrless v'$; los móviles se han encontrado en el punto O.

5º $a'v - v'a = 0$ y $v = v'$; los móviles estarán siempre juntos.

209. Discusión de la ecuación de primer grado con una incógnita. En general, toda ecuación de primer grado puede reducirse a la forma

$$ax = b, \quad \text{o sea,} \quad x = \frac{b}{a}.$$

Pueden considerarse los nueve casos que acaban de estudiarse, a saber:

$$b > 0 \begin{cases} a > 0; & x \text{ es } +. \quad (1) \\ a = 0; & x = \infty. \quad (2) \\ a < 0; & x \text{ es } -. \quad (3) \end{cases} \qquad b = 0 \begin{cases} a > 0; & x = 0. \quad (4) \\ a = 0; & x = \frac{0}{0}. \quad (5) \\ a < 0; & x = 0. \quad (6) \end{cases}$$

$$b < 0 \begin{cases} a > 0; & x \text{ es } -. \quad (7) \\ a = 0; & x = -\infty. \quad (8) \\ a < 0; & x \text{ es } +. \quad (9) \end{cases}$$

Estos nueve casos se reducen a cinco, como en el problema de los móviles, según se puede observar en el cuadro anterior.

En general:

1º El valor positivo es siempre admisible; el problema es posible.

2º El valor ∞ no es admisible; el problema es imposible.

3º El valor negativo es inadmisible; el problema es imposible.

Sin embargo, puede admitirse una respuesta negativa siempre que tenga o pueda dársele alguna interpretación, aunque el pro-

ALGEBRA ESTUDIANTE

blema pida una respuesta positiva. Para la interpretación de respuestas negativas, puede seguirse la regla siguiente:

Cuando la cantidad que se busca en la resolución de un problema puede considerarse en dos sentidos opuestos, una *respuesta negativa* indica que el valor de la incógnita debe tomarse en *sentido opuesto* al que sugiere el enunciado del problema.

210. **Ejemplo de solución negativa.** *Un padre de familia tiene* 60 *años, y su hijo* 26. *¿Dentro de cuántos años será la edad del padre triple de la del hijo?*

Número de años pedido: x.
Edad del padre pasados x años: $60 + x$.
Edad del hijo pasados x años: $26 + x$.
Conforme al enunciado:

$$60 + x = 3(26 + x)$$
$$60 + x = 78 + 3x$$
$$-2x = 18$$
$$x = -9.$$

Esta respuesta negativa indica que hace 9 años fué la edad del padre triple de la del hijo.

En efecto, la edad del padre era, hace 9 años: $60 - 9 = 51$ años, y la del hijo: $26 - 9 = 17$ años; y $51 = 3 \times 17$.

EJERCICIO 40

Resolver los problemas siguientes:

1. ¿Cuál es el número cuyo tercio, sumado con su mitad, da 860?

2. ¿Cuál es el número cuyo $^1/_{25}$, aumentado en 600, da 1 000?

3. El tercio de un número, sumado con su cuarta parte, da 35. ¿Cuál es ese número?

4. Los $^3/_4$ de un número, sumados con sus $^5/_6$, dan 494. Hallar el número.

5. Los $^5/_6$ del precio de una fábrica, disminuídos en \$ 3 000, valen \$ 563 000. Dígase el precio de la fábrica.

6. **Hallar un número que tenga 512 por diferencia entre su tercio y su cuarta parte.**

7. **¿Cuál es el número cuyos $^3/_8$, disminuídos en 72, dan 159?**

8. **Hallar la fortuna de una persona que, habiendo gastado ya los $^{54}/_{79}$, aún tiene \$ 7 900.**

9. ¿Cuál es el número que sobrepasa a sus $^3/_4$ en 144?

10. **Los $^2/_3$ de los $^3/_4$ de un número, aumentados en sus $^8/_9$, valen 25. Hallar dicho número.**

11. **Los $^2/_5$ del precio de un objeto, restados de \$ 12, dan un resto igual a los $^4/_5$ de dicho precio. ¿Cuál es el precio?**

12. **¿Cuál es el número cuya mitad, aumentada en 30, es igual a los $^3/_4$ del mismo número aumentados en 5?**

13. Triplicando el jornal de un obrero y dividiendo el resultado entre 7, se le hace perder \$ 24.00. ¿Cuál es su jornal?

14. **Un padre deja los $^2/_3$ de sus bienes a uno de sus hijos; los $^5/_{16}$ al segundo, y los \$ 640 restantes al tercero. Hállese la suma repartida.**

15. **Si tuviera otra cantidad igual a la que tengo, más su mitad, su cuarta parte, y \$ 1, tendría \$ 100. ¿Cuánto tengo?**

16. **¿Qué número se ha de añadir a cada uno de los términos del quebrado $^{19}/_{163}$ para que sea igual a $^1/_7$?**

17. **La edad de Juan es la cuarta parte de la edad de su padre. Calcúlese la edad de cada uno, sabiendo que la suma de las dos es 70 años.**

18. **Hace dos años la edad de Roberto era la mitad de lo que será dentro de 9 años. ¿Qué edad tiene actualmente?**

19. **La edad de un padre, sumada con la de su hijo, es 58 años. Dentro de 10 años la edad del padre será el doble de la del hijo. ¿Qué edad tiene actualmente cada uno?**

20. **El doble de mi edad, aumentado en su mitad, en sus $^2/_5$, en sus $^1/_{10}$ y en 40, suma 200 años. ¿Cuántos años tengo?**

21. **La edad de Carlos es la mitad de la de Pedro. Hace 6 años, la edad de Pedro era cuádruple de la de Carlos. Calcúlese la edad actual de cada uno.**

22. **Dos números están en la razón de 5 a 7, y su diferencia es 18. Hállense los dos números. (Llámese uno $5x$ y el otro $7x$).**

23. **Dos números están en la razón de 3 a 8. Si al menor se le añade 45 y se resta 15 del mayor, los resultados son iguales. Hállense los dos números.**

24. De un cesto de naranjas se han sacado la mitad y una décima parte, y ahora quedan 200. ¿Cuántas había antes?

25. ¿Qué horas son, si lo que queda del día es igual a los $\frac{3}{5}$ de lo que ya ha transcurrido?

26. A los $\frac{7}{11}$ de un número les falta tanto para igualar a 40 como lo que sus $\frac{3}{4}$ exceden a 21. ¿Cuál es el número?

27. Dentro de $3\frac{1}{3}$ años mi edad se habrá aumentado en $\frac{1}{16}$. ¿Cuántos años tengo?

28. He comprado un reloj. El triple de su costo, restado de $2 500, da un resto igual al doble de dicho costo. ¿Cuál es su valor?

29. En un huerto se ha plantado cierto número de árboles: la mitad de manzanos, la cuarta parte de perales, la sexta parte de duraznos, y por fin 50 ciruelos. Hállese el número de árboles plantados.

30. Un viñador vendió primeramente el tercio de su cosecha de vino, y luego, los $\frac{4}{7}$ del resto. ¿Cuántos hectolitros de vino cosechó, sabiendo que aún le quedan 100 hl?

31. Me faltan $3 para poder comprar un estuche de dibujo; si costara $\frac{1}{3}$ menos, me sobrarían $16. Hallar el precio del estuche.

32. Dígase el número de alumnos que hay en una clase, sabiendo que la tercera parte de ellos están leyendo, la cuarta parte escribiendo, y los otros 20 resolviendo problemas.

33. Un mercader ha comprado 42 m de paño por $336. ¿A cómo habrá de vender el metro para ganar $\frac{1}{9}$ del precio de venta?

34. La suma de dos números es 32, y el menor de ellos es $\frac{1}{7}$ del mayor. ¿Cuáles son los dos números?

35. La diferencia de dos números es 565, su cociente 5, y el residuo de la división es 85. ¿Cuáles son esos números?

36. Un jardinero deja al propietario la mitad de los duraznos que ha recogido; da la cuarta parte de los restantes a un amigo, y se queda con 30 duraznos. ¿Cuántos había recogido?

37. Un ganadero compra 24 carneros y otros tantos corderos; un carnero le cuesta $32 más que un cordero. ¿Cuánto pagó por cada clase de animales, si en total pagó $4 608?

38. Decía un cartero: Si hubiese distribuído el tercio, el cuarto y los $\frac{2}{5}$ del doble de las cartas que puse en mi valija, más 50 cartas, habría distribuído 640. Dígase cuántas cartas ha distribuído el citado cartero.

39. Un ranchero vendió una yegua y un caballo por $7 200. El precio del caballo es los $\frac{7}{8}$ del de la yegua. ¿En cuánto vendió cada animal?

40. La edad que tiene actualmente un señor es el quíntuplo de la edad de su hijo; pero, dentro de 6 años, su edad será sólo el triple de la de su hijo. ¿Cuál es la edad del padre y la del hijo?

41. Divídase 540 en dos partes proporcionales a 5 y 4.

42. Dos obreros necesitan 12 horas para hacer un trabajo. El primero solo lo haría en 20 horas; ¿en cuánto tiempo lo haría el segundo?

43. Una llave llenaría un tanque en 10 horas, y otra llave lo vaciaría en 15 horas. Estando el tanque vacío, ¿en cuánto tiempo se llenará, si se abren las dos llaves a la vez?

44. Un hombre, al morir, deja a cada uno de sus hijos igual cantidad de dinero. Al mayor le da $40 000 y $\frac{1}{6}$ del sobrante; al segundo, $80 000 y $\frac{1}{6}$ del sobrante; y así sucesivamente, o sea, $40 000 más que al anterior y $\frac{1}{6}$ del sobrante. Hállese la suma repartida, el número de hijos y la cantidad que toca a cada uno.

45. ¿En qué proporción se ha de mezclar vino de a $16 con vino de a $10, para que resulte la mezcla a $12?

46. Un lingote de plata de ley de .950 pesa 9 kg. ¿Qué cantidad de cobre se ha de añadir, para reducirlo a la ley de .900?

47. Un lingote de oro de 300 g está a la ley de .900. ¿Cuántos gramos se le habrán de añadir de otro lingote de ley de .700, para obtener un lingote de ley de .850?

48. Cien kilos de agua salada contienen 8 500 g de sal. ¿Cuánta agua pura se habrá de añadir, para que 200 kg de mezcla no contengan más que 5 000 g de sal?

49. Son las 12. ¿A qué horas tendrán lugar las 5 primeras superposiciones sucesivas de las manecillas de un reloj?

50. ¿Qué horas son, cuando las manecillas de un reloj se encuentran sobrepuestas entre las 7 y las 8?

51. Las dos manecillas de un reloj forman una línea recta y señalan puntos opuestos en la carátula. ¿Qué horas son, si la manecilla de las horas se halla entre las 4 y las 5?

52. Dos pagarés a la orden, uno de $8 000 a 4 meses, y el otro de $1 800 a 20 meses, han sufrido un descuento de $347. ¿Cuál ha sido el tipo de descuento?

53. Dos trenes, cuyas velocidades respectivas son 48 y 52 km por hora, salen al mismo tiempo, el primero de *A* y el segundo de *B*, para

encontrarse en camino. ¿A qué distancia de su punto de partida estará entonces cada tren, si entre las dos ciudades hay 500 km?

54. A las 4 de la mañana sale un tren de A para el Norte, con una velocidad de 50 km por hora. A las 5 sale otro tren a la velocidad de 60 km. Se pide cuánto tiempo tardará el segundo tren para alcanzar al primero, y el espacio que habrá recorrido.

55. Una zorra lleva 60 saltos de ventaja a un galgo que la persigue. Mientras el galgo da 4 saltos, la zorra da 5; pero 3 saltos del perro equivalen a 5 de la zorra. ¿Cuántos saltos dará el galgo para alcanzar la zorra?

56. Divídase un número a en dos partes tales que la primera multiplicada por m, más la segunda multiplicada por n, sumen ma.

57. Hallar dos números consecutivos cuyos cuadrados tengan por diferencia $4a + 1$.

58. ¿Qué horas son, si lo que falta del día es igual a lo que ya ha pasado multiplicado por m?

59. Hallar un número cuya mitad y cuyo tercio sumados, den $10a$.

60. Hallar un número que sumado separadamente con a y con $2a$, dé dos sumas que estén en la misma razón que 2 y 3.

61. Hállese un número que sobrepase a $2a$ en lo que $\frac{3a}{2}$ sobrepasa a $\frac{1}{6}$ de dicho número.

62. ¿Cuál es el número igual a su raíz cuadrada multiplicada por m?

63. ¿En qué cantidad se han de aumentar los dos términos del quebrado $\frac{a}{b}$ para tener $\frac{3a}{2b}$?

64. Un padre tiene la edad de su hijo multiplicada por n, y la suma de sus edades es $a(n+1)$. ¿Cuáles son esas edades?

65. La edad de un hombre es a, y la de su hijo, b. ¿Dentro de cuánto tiempo será la edad del padre la de su hijo multiplicada por m?

66. Una joya ha costado $\$\,a$; ¿por cuánto se ha de vender para ganar b % sobre el precio de venta?

67. Hallar una proporción cuyos términos sean inferiores en la misma cantidad a los números a, $2a$, $4a$, $9a$.

68. Dividir el número a en dos partes que, elevadas al cuadrado, tengan por diferencia $2a - a^2$.

69. ¿Qué número se ha de añadir a los dos términos del quebrado $\frac{1}{a}$ para que resulte $\frac{a-1}{a+1}$?

70. Se han reunido a personas para votar. Se presentan tres candidatos: el primero obtiene m votos más que el segundo, y el segundo obtiene n más que el tercero. ¿Cuántos votos ha tenido cada uno de los candidatos, si no ha habido más que 3 abstenciones?

71. Una sirvienta gana por año $\$\,a$ y un vestido. Después de n meses se separa y le dan $\$\,b$ y el vestido. ¿Cuánto vale dicho vestido?

72. Una llave llenaría un tanque en a horas; otra llave lo llenaría en b horas; y una tercera lo vaciaría en $a + b$ horas. Estando vacío el tanque, se abren las tres llaves a la vez; en cuánto tiempo se llenará?

73. Dos automóviles, cuyas velocidades respectivas, por hora, son v y v', corren en la misma dirección, y se hallan a una distancia d uno de otro. Pregúntase cuánto tiempo tardará el segundo en alcanzar al primero.

74. ¿Cuánto aceite de $\$\,a$ el litro se ha de mezclar con otro aceite de $\$\,b$, para obtener 100 litros de a $\$\,d$?

75. Se tienen dos lingotes de plata cuyas leyes son, respectivamente, l y l'. ¿Cuánto se habrá de tomar cada uno de ellos para formar otro lingote de P kg y de ley L?

Después de resolver los siguientes problemas, dígase qué observación debe hacerse acerca de la respuesta.

76. ¿Cómo se pagaría una deuda de $\$\,710$ con billetes de $\$\,20$ y billetes de $\$\,10$?

77. La suma de $\$\,7$ se forma con 30 monedas de 20 ¢ y de 10 ¢. ¿Cuántas monedas hay de cada clase?

78. Obténgase un número tal que, restando de él su triple, el resultado sea igual a ese número aumentado en 15.

79. Un lado de un triángulo sobrepasa en 20 cm al segundo lado, y éste mide 40 cm más que el tercer lado. ¿Cuánto mide cada lado, si el perímetro es de 70 cm?

80. La suma de tres números consecutivos es 35. ¿Cuáles son esos números?

81. Calcúlese el lado de un cuadrado tal que, cuando se disminuye un lado en 10 cm y se aumenta el adyacente en 15 cm, se obtiene un rectángulo de 18 cm de perímetro.

82. En una cesta hay 80 huevos, y el número de malos es mitad del de los buenos. ¿Cuántos huevos hay de cada clase?

83. Triplicando lo que cierto número sobrepasa a su cuarta parte, se obtiene 17. ¿Cuál es ese número?

3

GRAFICAS

I. DEFINICION. CLASES. APLICACIONES

211. Gráficas. Es costumbre muy generalizada, en la vida moderna, establecer comparaciones entre ciertas magnitudes, como la producción de tal o cual artefacto, de algún metal determinado en varios años, los records alcanzados en atletismo en varias olimpiadas, las velocidades a que se ha llegado con los modernos medios de transporte, los nacimientos y las defunciones en tal número de años, etc., ya sea limitándose a una nación, o bien a regiones más extensas del globo, o al mundo entero.

En la práctica, la comparación de esas magnitudes se hace sobre todo por **gráficas**, basándose en los datos numéricos correspondientes a dichas magnitudes, tales como los que proporcionan las *estadísticas* en que se consignan esos datos.

Es tan grande la importancia que en la actualidad ha alcanzado la estadística, que se ha llegado a decir que vivimos en la *edad de la estadística.*

La ventaja de la gráfica es mostrar, rápida e intuitivamente, la relación que guardan las magnitudes que se comparan, cosa que no se logra al mismo grado con simples datos numéricos.

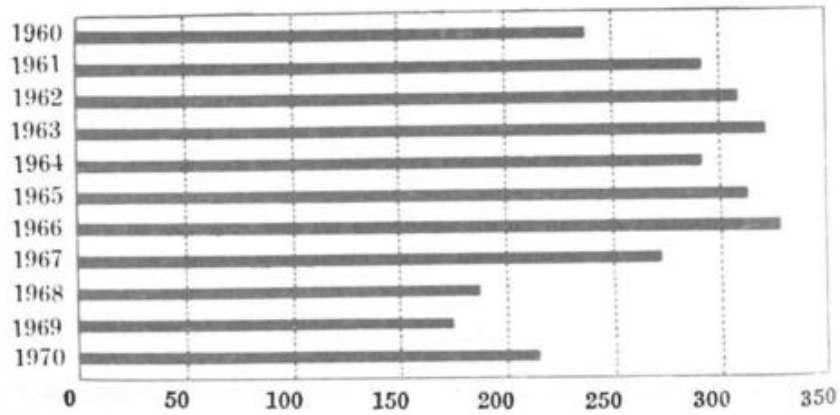


Fig. 26. — Gráfica de barras.

212. Diferentes clases de gráficas. La gráfica se hace ya por medio de *rectas* y de *barras*, ya por medio de *sectores circulares* o *líneas poligonales*, ya por medio de *figuras simbólicas* que guardan relación con las magnitudes a que hacen referencia.

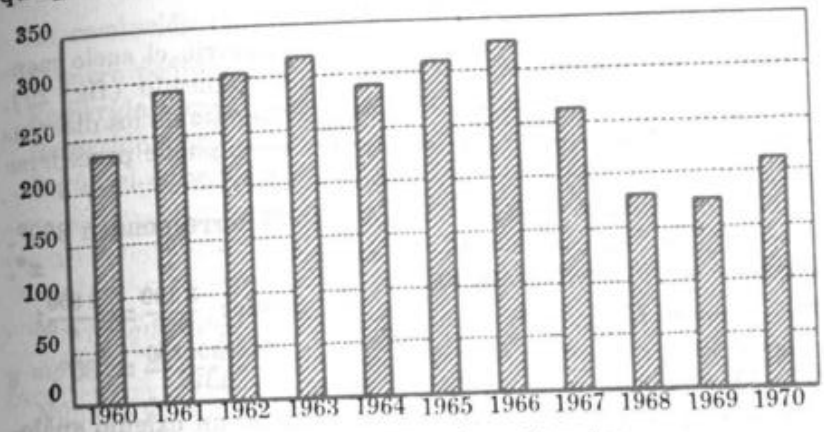


Fig. 27. — Gráfica de rectángulos.

Las figuras 26, 27 y 28 son tres clases de gráficas, construídas con escala arbitraria, aplicadas a unos mismos datos, a saber:

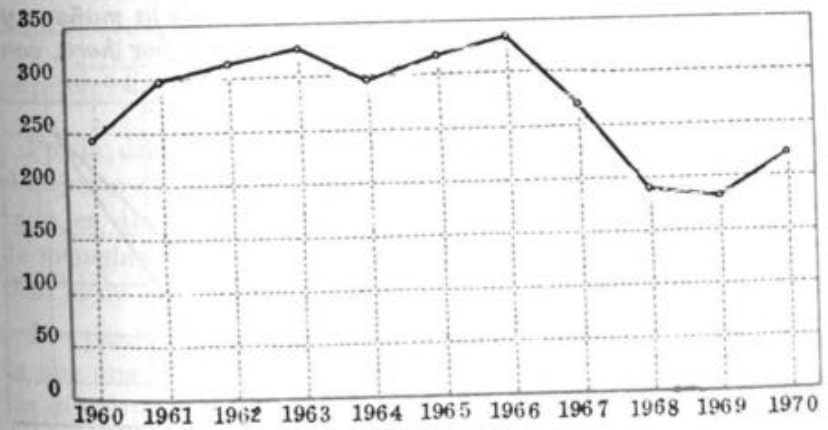


Fig. 28. — Gráfica poligonal.

213. Gráfica de sectores circulares. EJEMPLO: *El sueldo de un empleado es de* \$ 8 100 *mensuales. Sus gastos son:* \$ 1 800 *de renta,* \$ 2 700 *de alimentos,* \$ 585 *de vestidos,* \$ 540 *de viajes y diversiones,* \$ 630 *degastos varios, y le quedan* \$ 1 845 *de ahorros.*

Represéntese con un círculo de radio arbitrario el suelo mensual del empleado (fig. 29). Para el cálculo de los diferentes sectores, puede procederse así:

Fig. 29. — G. de sectores circulares.

A \$ 8 100 corresponden 360°.
A \$ 1 800 „ x°.

De donde: $\frac{8\,100}{360} = \frac{1\,800}{x}$;

$$x = \frac{1\,800 \times 360}{8\,100} = 80°.$$

Haciendo un cálculo análogo para las demás cantidades, se obtienen, sucesivamente, los sectores siguientes: 120°, 26° 24°, 28° y 82°.

214. La gráfica en Algebra. Lo que más interesa en Algebra, es la representación gráfica de *fórmulas* y *ecuaciones*, en la *resolución de problemas*, como se ve a continuación.

215. Ejemplos. 1° *Un ciclista sale a las* 8 *de la mañana y con una velocidad, supuesta uniforme, de* 16 *km por hora, con dirección a un punto determinado. Otro ciclista sale dos horas después, con una velocidad de* 24 *km por hora y se dirige hacia el mismo punto. ¿Cuánto tiempo tardará el segundo en alcanzar al primero?*

La gráfica adjunta (fig. 30) indica que se encuentran cuatro horas después de haber salido el segundo ciclista, es decir, a las 14 horas.

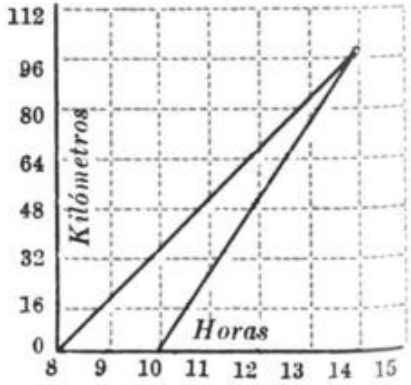


Fig. 30.

La misma gráfica señala igualmente que cada ciclista ha recorrido 96 km, y por ella puede verse también a qué distancia estaba cada uno del otro a las diferentes horas: 32 km a las 10, 24 a las 11, 16 a las 12, etc.

La resolución del mismo problema, por ecuación es:

Número pedido: x.
Recorrido por el primer ciclista: $32 + 16x$.
Recorrido por el segundo ciclista: $24x$.
Según el enunciado: $32 + 16x = 24x$

$$32 = 24x - 16x$$
$$8x = 32$$
$$x = 4 \text{ horas.}$$

2° *Se quiere pagar la cantidad de* \$ 160 *con monedas de* \$ 20 *y monedas de* \$ 10. *¿De cuántas maneras puede hacerse el pago?*

Número de monedas de \$ 20: v.
Número de monedas de \$ 10: d.
Según el enunciado: $20v + 10d = 160$

$$2v + d = 16$$
$$d = 16 - 2v.$$

Dando valores numéricos a v se obtienen los correspondientes a d.

La siguiente tabulación da las diferentes maneras de hacer el pago.

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d	16	14	12	10	8	6	4	2	0

Puede dibujarse un diagrama, como el adjunto (fig. 31), en donde se ha llevado, en dirección horizontal, el número de monedas de \$ 20, y en dirección vertical el de las monedas de \$ 10.

Los puntos blancos tomados en la recta que une los puntos extremos, indican las diferentes soluciones del problema y corresponden a los pares de valores calculados para v y d en la tabulación.

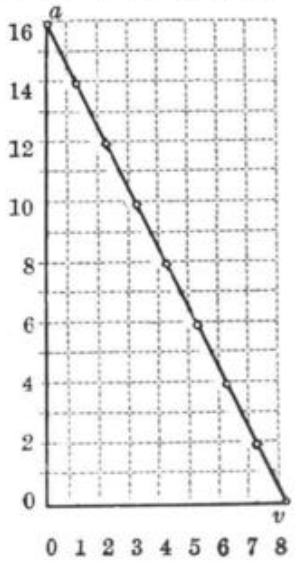


Fig. 31.

216. Ecuación determinada. En las ecuaciones y problemas de los dos capítulos precedentes, lo mismo que en la del primer problema del Nº 215, se ha obtenido una sola raíz o solución, lo cual permite afirmar que: Toda ecuación de primer grado con una incógnita *sólo tiene una raíz*, es decir, existe un valor único, bien determinado para dicha incógnita, que satisface la ecuación.

Toda ecuación de primer grado con una incógnita es determinada.

217. Ecuación indeterminada. Si la ecuación es de primer grado, pero con dos incógnitas, no sucede lo mismo, como se acaba de ver en el segundo problema del Nº 215. Se han encontrado 9 pares de valores que satisfacen la ecuación $2v + d = 16$, y se habrían obtenido más si se hubieran podido señalar valores negativos para v y d, cosa inadmisible en el caso considerado.

Toda ecuación de primer grado con dos incógnitas admite *una infinidad de soluciones*, es decir, una infinidad de pares de valores determinados, no arbitrarios, que satisfacen la ecuación propuesta.

: Una ecuación de primer grado con dos incógnitas es indeterminada.

II. REPRESENTACION CARTESIANA

218. Representación cartesiana. La solución gráfica dada al segundo problema del Nº 215 (fig. 31), es la representación llamada cartesiana.

Como sólo se han considerado valores positivos de v y de d, falta generalizar para valores algebraicos cualesquiera, según puede verse a continuación.

219. Ejes. Sean las rectas $X'X$ y $Y'Y$ (fig. 32), perpendiculares entre sí, que se cortan en el punto O. Estas dos rectas se llaman *ejes*, y son *líneas de referencia*, porque sirven para localizar un punto en el plano que determinan.

El eje horizontal se llama eje de las equis y el vertical, eje de las yes. Dichos ejes determinan 4 *cuadrantes* que se numeran en el orden que está indicado en la figura 32.

El punto de intersección O *se llama origen o cero.*

220. Abscisa y ordenada. Coordenadas. *Abscisa de un punto* P *es su distancia* NP *al eje vertical, y suele representarse con* x (fig. 33).

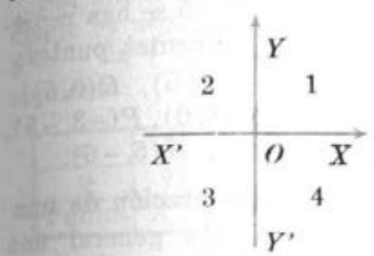


Fig. 32.

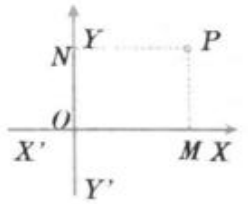


Fig. 33.

Ordenada de un punto P *es su distancia* MP *al eje horizontal, y suele representarse con* y.

La abscisa y la ordenada del punto P *se llaman coordenadas cartesianas de ese punto.*

221. Signos de las coordenadas. Por convención:

1º Toda abscisa que queda a la *derecha* del eje $Y'Y$ es *positiva.*

2º Toda abscisa que queda a la *izquierda* de $Y'Y$ es *negativa.*

3º Toda ordenada *arriba* del eje $X'X$ es *positiva.*

4º Toda ordenada *debajo* del mismo eje es *negativa.*

Para indicar que un punto P tiene como abscisa 3 y como ordenada 4, se escribe $P(3, 4)$; para un punto M de abscisa 5 y ordenada (-7), se escribe $M(5, -7)$.

La coordenada horizontal es la que se escribe primero.

222. Representación de un punto. Para representar un punto cualquiera, v. g.: $P(-3, 2)$, se escoge una *unidad arbitraria*, 5 mm por ejemplo, y se llevan 3 de esas unidades sobre $X'X$, a partir de O, y a la izquierda, con lo cual se obtiene el punto M. En M se levanta una perpendicular y en ella, partiendo de M, se cuentan 2 unidades *hacia arriba*, y se tiene representado el punto P (fig. 34).

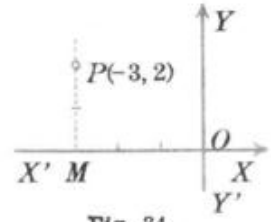


Fig. 34.

La unidad es arbitraria y en la generalidad de los casos se toma la misma para las x y para las y.

El uso de *papel cuadriculado* es muy recomendable para *gráficas*, pues con él se evita el trazo de perpendiculares.

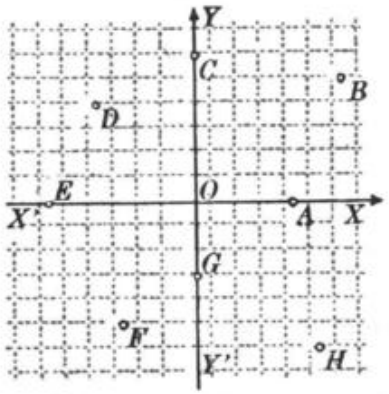


Fig. 35.

En la figura 35 se han representado los siguientes puntos:

$A(4,0)$, $B(6,5)$, $C(0,6)$, $D(-4,4)$, $E(-6,0)$, $F(-3,-5)$, $G(0,-3)$, $H(5,-6)$.

223. Representación de una ecuación. En general una ecuación con dos incógnitas o variables, se puede representar gráficamente.

Sea la ecuación $y = 2x - 3$.

A cada valor que se atribuya a x (variable independiente), corresponde un valor para y (función).

Se comienza por *tabular:*

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5
Puntos	A	B	C	D	E	F	G

Llevando los valores de x como abscisas (fig. 36), y los de y como ordenadas, según se ha explicado, cada par de valores quedará representado por un punto.

Uniendo ordenadamente los diferentes puntos obtenidos, resulta una *recta*, que es la *representación gráfica* o *cartesiana* de la ecuación $y = 2x - 3$.

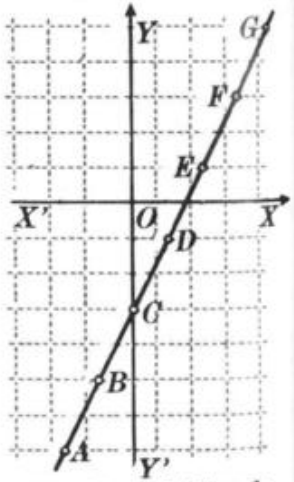


Fig. 36. — Gráfica de $y = 2x - 3$.

224. Ecuación lineal. Toda ecuación de primer grado con dos incógnitas, de la forma $y = 2x - 3$, o generalizando, $y = mx + b$, se llama *ecuación lineal*, porque su gráfica es una *recta*.

225. Coeficiente angular de una recta. Cuando se da una ecuación de primer grado con dos incógnitas y se despeja el valor de y en función de x, si el coeficiente de x es *positivo*, la recta que la representa gráficamente forma un *ángulo agudo* con OX, como se ve con la ecuación $y = 2x - 3$ (fig. 36).

Sea ahora el caso en que dicho coeficiente es *negativo*, como en la ecuación $y = -2x + 1$, cuya tabulación es la siguiente:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	5	3	1	-1	-3	-5
Puntos	A	B	C	D	E	F	G

Construyendo gráficamente la recta que representa esta ecuación, se ve que forma con OX un *ángulo obtuso* (fig. 37).

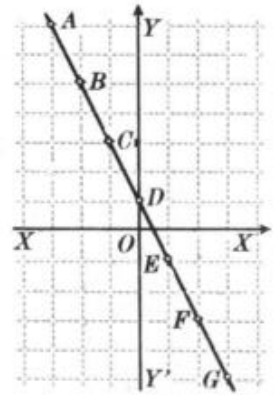


Fig. 37. — Gráfica de $y = -2x + 1$.

De estos ejemplos se infiere que, dada una ecuación de primer grado con dos incógnitas, de la forma $y = mx + b$, el ángulo que la recta representativa de la ecuación forma con la dirección OX depende del coeficiente de x; por eso, a dicho coeficiente se ha dado el nombre de *coeficiente angular de la recta.*

226. Función creciente y función decreciente. En el primer caso, es decir, en $y = 2x - 3$, el valor de y crece al mismo tiempo que el valor de x: se dice entonces que la función es *creciente.*

En el segundo caso, con la ecuación $y = -2x + 1$, el valor de y decrece cuando aumenta el valor de x: se dice por eso que la función es *decreciente.*

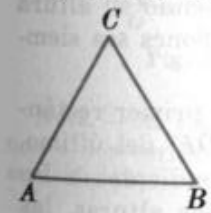


Fig. 38.

Luego: *Toda ecuación lineal de la forma* $y = mx + b$ *es función creciente o decreciente, según que el coeficiente de* x *sea positivo o negativo.*

227. Variación directamente proporcional. Sea el triángulo equilátero ABC (fig. 38). Si se designa su perímetro por p y el lado por l, se tiene:

$$p = 3l. \qquad (1)$$

Si se duplica o triplica cada lado, resulta duplicado o triplicado el perímetro, y si el lado se reduce a su mitad, el perímetro

queda también reducido a la mitad del valor primitivo, y así sucesivamente.

Se ve que el valor del perímetro varía con el lado, y que la variación se hace en el mismo sentido, es decir, a un aumento o disminución del lado, corresponde un aumento o disminución del perímetro. En casos como éste se dice que la variación de una de las **magnitudes** (perímetro) es directamente proporcional a la variación de la otra (lado).

En general: *Cuando dos magnitudes varían proporcionalmente en el mismo sentido, se dice que varían en forma directamente proporcional, o que la variación de una es directamente proporcional a la de la otra.*

Si se hace una tabulación y después se llevan en el eje horizontal los valores que se asignen al lado, y verticalmente los valores correspondientes al perímetro, uniendo los puntos obtenidos resulta la recta representada en la figura 39, en la que se ve que la ordenada de un punto cualquiera es el triple de la abscisa de ese mismo punto.

Si, para generalizar, la ecuación (1) se escribe

$$y = kx,$$

el coeficiente k se llama *constante de proporcionalidad.*

228. Variación inversamente proporcional. Sea el rectángulo $OA'AA''$ (fig. 40), de base 1 y altura 12.

Constrúyanse, sucesivamente, los rectángulos $OB'BB''$, $OC'CC''$, etc., cada uno equivalente al rectángulo $OA'AA''$, aumentando, en cada rectángulo, la base del anterior y reduciendo su altura de tal manera que el producto de las dos dimensiones sea siempre 12.

Si se toma como eje vertical la altura OA'' del primer rectángulo considerado, y como eje horizontal la base OF' del último, y se llevan horizontalmente los valores correspondientes a las bases, y verticalmente, los que corresponden a las alturas, las coordenadas de los vértices A, B, C, D, E, F de los 6 rectángulos son, respectivamente $(1, 12)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$, $(12, 1)$.

Uniendo consecutivamente esos puntos, se obtiene la curva representada en la figura 40.

En este caso la variación de la base ha sido inversamente proporcional a la de la altura, pues a una disminución de la altura ha correspondido un aumento de la base.

Cuando dos magnitudes varían proporcionalmente en sentido contrario, se dice que varían en forma inversamente proporcional.

Si se designa por b la base y la altura por a, para cada rectángulo se ha tenido:

$$ba = 12, \qquad (2)$$

ecuación de 2º grado con dos variables: b y a.

Si, para generalizar, la ecuación (2) se escribe

$$xy = k, \quad \text{o sea,} \quad y = \frac{k}{x},$$

esta expresión indica una variación inversamente proporcional, en la cual k se llama *constante de proporcionalidad.*

Fig. 39.

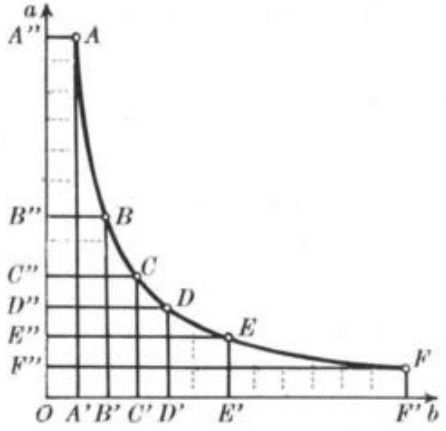


Fig. 40.

Nota. — La representación gráfica de una ecuación de 2º grado con una o dos variables, es siempre una curva, y la correspondiente a la ecuación (2) se llama *hipérbola equilátera.*

EJERCICIO 41

Dadas las ecuaciones siguientes, dígase, sin representarlas gráficamente, si se trata de funciones crecientes o decrecientes y si las rectas que las representan forman un ángulo agudo u obtuso con OX.

1. $y = 2x + 1$.
2. $y = 3x - 4$.
3. $y = -x - 5$.
4. $2x + 3y = 3$.
5. $x - 2y = -6$.
6. $3y - 2x + 5 = 0$.

Construir las gráficas de las funciones lineales siguientes:

7. $y = x + 1$.
8. $y = -x + 2$.
9. $y = 3x + 4$.
10. $2x + 3y = 6$.
11. $y = \frac{1}{2}x - 1$.
12. $\frac{y}{3} + \frac{x}{2} = 1$.

Represéntense, en cada caso, en una misma gráfica, los pares de funciones siguientes, y mídase con el transportador el ángulo que las rectas resultantes forman entre sí. Determínense, además, las coordenadas de cada punto de intersección.

13. $y = x - 1$, $y = -x + 5$.
14. $y = 2x + 5$, $y = -\frac{1}{2}x$.
15. $y = 3x - 11$, $y = -\frac{1}{3}x - 1$.

Dados los siguientes pares de ecuaciones, constrúyanse las rectas y mídase, en cada una de las tres gráficas, el ángulo que forman.

¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección?

16. $y = -2x - 1$, $y = 3x + 9$.
17. $y = -\frac{1}{2}x + 5$, $y = -3x + 15$.
18. $y = -3x + 10$, $y = 2x - 10$.

Represéntense gráficamente, en la misma figura, los sistemas siguientes y dígase qué rectas resultan.

19. $y = 2x + 3$, $y = 2x - 4$.
20. $y = 3x + 1$, $y = 3x - 2$.

21. Si la variación de y es inversamente proporcional a la de x, y si $y = 9$ cuando $x = 4$, ¿qué valor tiene y cuando $x = 18$?

22. Sabiendo que la variación del tamaño aparente de un cuerpo es inversamente proporcional a su distancia del punto de observación, y si a la distancia de 125 m cierto objeto se ve bajo un ángulo de 2°, ¿bajo qué ángulo se verá a la distancia de 375 m?

23. Si una esfera se ve bajo un ángulo de 3° a la distancia de 10 m, ¿cuánto habrá que alejarse para ver esa misma esfera bajo un ángulo de 30'?

24. A la distancia mínima de la Tierra al Sol, que es de 147 millones de km, el Sol se ve bajo un ángulo de 32' 36". ¿Cuál es la distancia máxima, dado que entonces el Sol se ve bajo un ángulo de 31' 32"?

25. La variación de la intensidad luminosa es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del punto de observación al foco de luz. Si a la distancia 10 m de un foco la intensidad es i, ¿cuál será la intensidad a la distancia de 100 m?

26. Una lámpara de 16 bujías y otra de 50 bujías distan de 2.50 m. ¿A qué distancia de la primera debería colocarse una pantalla para que quedase igualmente iluminada por ambas caras?

¿Cuánto habrá que alejarse para que esa intensidad sea $^1/_2$ de la que se percibe a los 10 m?

4

ECUACIONES SIMULTANEAS DE PRIMER GRADO CON DOS O MAS INCOGNITAS

I. DEFINICIONES. RESOLUCION GRAFICA

229. Sistema de ecuaciones. *Si se quiere pagar la suma de* \$ 160 *con monedas de* \$ 20 *y monedas de* \$ 10, *¿cuántas monedas de cada clase se deberán entregar?*

Según se vió (Nº 215), la resolución del problema da lugar a la ecuación $d = 16 - 2v$, la cual admite muchas soluciones que satisfacen las condiciones del problema. Pero este problema, indeterminado porque tiene muchas respuestas, deja de serlo si se introduce este nuevo dato: *el número de monedas debe ser* 10.

Completado así el enunciado, se tienen dos ecuaciones en lugar de una sola, y son:

$$2v + d = 16,$$
$$v + d = 10.$$

El conjunto de las dos ecuaciones forma un *sistema* de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

En general: *Se llama sistema de ecuaciones todo conjunto de ecuaciones distintas que tienen una o más soluciones comunes.*

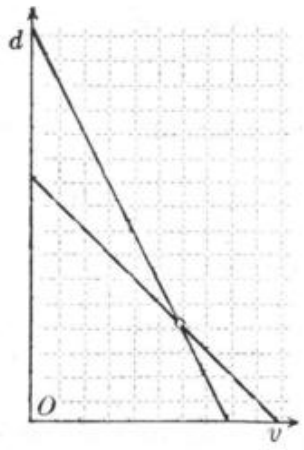


Fig. 41. — Gráfica del sistema 2v+d=16, v+d=10.

230. Resolución del sistema. Si se trata de resolver el sistema que se está considerando:

$$2v + d = 16, \qquad (1)$$
$$v + d = 10, \qquad (2)$$

se pueden representar gráficamente las rectas que corresponden a las dos ecuaciones. Su intersección que, como se ve en la figura 41, se verifica en el punto $v = 6$, $d = 4$, es la solución del sistema, puesto que cualquiera de esas dos ecuaciones se satisface por estos valores.

Podría resolverse también por *tabulación*, como se indica a continuación.

Para (1):

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d	16	14	12	10	8	6	4	2	0

Para (2):

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Los dos pares de valores, iguales en las dos *tabulaciones*, son las soluciones del sistema.

231. Ecuaciones simultáneas. Las dos ecuaciones que se satisfacen para los mismos valores de v y de d, se llaman *ecuaciones simultáneas.*

Puede decirse que: *Ecuaciones simultáneas son aquellas que tienen las mismas soluciones, es decir, que se satisfacen para unos mismos valores de las incógnitas.*

232. Solución de un sistema de ecuaciones. *Resolver un sistema de ecuaciones simultáneas es hallar el conjunto de valores que satisfacen simultáneamente cada una de sus ecuaciones.*

233. Eliminación de una incógnita. Los procedimientos de resolución que se acaban de exponer no son, por lo general, de aplicación práctica.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es preferible reducir el sistema propuesto a una sola ecuación que sólo contenga una incógnita. A esta reducción se la llama *eliminación* de una incógnita.

La eliminación se funda en que una misma literal de un sistema tiene igual valor en cada ecuación. Así, en el sistema del Nº 230, v y d tienen el mismo valor, porque en cada una representan, respectivamente, el número de monedas de $ 20 y $ 10.

Evidentemente que si del primer miembro de la primera se resta el primero de la segunda, y de 16 se resta 10, o sea, si se restan miembro a miembro las dos ecuaciones, resultan diferencias iguales, y sólo se tiene:

$$v = 6,$$

con lo cual queda eliminada la incógnita d.

Eliminar una incógnita de un sistema de ecuaciones es reducir el sistema propuesto a otro que tenga una ecuación y una incógnita menos.

234. Métodos de eliminación. Los métodos de eliminación son:

1º Por *adición* o *sustracción*,

2º Por *igualación*,

3º Por *sustitución*.

Mediante la aplicación de alguno de estos tres métodos se resuelven algebraicamente los sistemas de ecuaciones simultáneas.

II. RESOLUCION POR ELIMINACION

235. Eliminación por suma o resta. **Sea resolver el sistema**

$$x - 2y = 8, \qquad (1)$$
$$3x + y = 66. \qquad (2)$$

Se va a eliminar x.

1º Multiplíquense ambos miembros de (1) por 3, para igualar los coeficientes de x en las dos ecuaciones; se obtiene:

$$3x - 6y = 24. \qquad (3)$$

2º Réstese miembro a miembro la (2) de la (3), con lo cual desaparecen los términos en x:

$$-7y = -42$$
$$y = 6.$$

3º Sustitúyase y por su valor en cualquiera de las ecuaciones dadas, y despéjese el valor de x:

$$x - 12 = 8$$
$$x = 20.$$

En este ejemplo se ha eliminado x por sustracción o resta.

Resolver el sistema

$$5x - 3y = 19, \qquad (1)$$
$$7x + 4y = 2. \qquad (2)$$

Se va a eliminar y.

1º Multiplíquese la (1) por 4 y la (2) por 3 para igualar los coeficientes de y en las dos ecuaciones; se obtiene:

$$20x - 12y = 76, \qquad (3)$$
$$21x + 12y = 6. \qquad (4)$$

2º Súmense (3) y (4) para que desaparezcan los términos en y:

$$41x = 82$$
$$x = 2.$$

3º Sustitúyase x por su valor en cualquiera de las ecuaciones dadas, y despéjese el valor de y:

$$10 - 3y = 19$$
$$-3y = 9$$
$$y = -3.$$

En este ejemplo se ha eliminado y por adición

236. **Regla.**
Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas empleando el método de eliminación por suma o resta:

1º *Multiplíquense los dos miembros de una de las ecuaciones, o de ambas, por números tales que resulten iguales los coeficientes de una misma incógnita.*

2º *Súmense las dos ecuaciones si dichos coeficientes son de signos contrarios, y réstense si son de mismo signo.*

3º *Resuélvase la ecuación que así resulta, con lo cual se obtiene el valor de la incógnita que contiene.*

4º *Sustitúyase este valor en una de las ecuaciones dadas y resuélvase; se obtiene así la otra incógnita.*

EJERCICIO 42

Resolver, eliminando por adición o sustracción, los siguientes sistemas. (Háganse oralmente los 6 primeros).

1. $x + y = 4,$ $x - y = 2.$
2. $x + y = 3,$ $x - y = 1.$
3. $x + y = 5,$ $x - y = 1.$
4. $x + y = 6,$ $x - y = 2.$
5. $x + 2y = 5,$ $x + y = 4.$
6. $3x + 2y = 7,$ $3x + y = 5.$
7. $x - y = 27,$ $x + y = 33.$
8. $3x - y = 4,$ $x + 3y = -2.$
9. $10x + 4y = 3,$ $40y - 10x = 8.$
10. $x - y = 1,$ $\frac{3x}{4} - y = -1$
11. $4x - 26 = y,$ $3x + 5y - 31 = 0.$
12. $5x + y = 12,$ $x + 5y = 36.$
13. $7x = 2y - 3,$ $19y = 6x + 89.$
14. $15u = 10 - 20v,$ $25u = 30v + 80.$
15. $7u = 1 + 10v,$ $16v = 10u - 1.$
16. $7y - x = x - 17,$ $2y + 3x = 38.$
17. $6r + 2s = -2,$ $r - 4s = -35.$
18. $x + 1 = \frac{y}{4},$ $x = \frac{y+1}{5}.$

19. $10u = 93 + 3y$, $6u = 7y + 61$.

20. $10m - n = 30.5$, $4m + 8n = 24.8$.

21. $5r + 7s = 71$, $8r - 3s = 0$.

22. $a - 11b = -2$, $2a - 10b = 2$.

23. $.06x + .02y = 204$, $.05x + .03y = 186$.

24. $m + v = 4\,000$, $.06m - .04v = 90$.

RESOLUCION POR ELIMINACION

(Continuación).

237. Eliminación por igualación **Resolver el sistema**

$$2x + 3y = 23, \quad (1)$$
$$5x - 2y = 10. \quad (2)$$

Se va a eliminar x.

1º Despéjese el valor de x en (1) y en (2); se tiene:

$$x = \frac{23 - 3y}{2}, \quad (3)$$
$$x = \frac{10 + 2y}{5}. \quad (4)$$

2º Iguálense las dos expresiones que representan el valor de x:

$$\frac{23 - 3y}{2} = \frac{10 + 2y}{5}.$$

Dése forma entera, o sea, quítense los denominadores, y luego resuélvase:

$$115 - 15y = 20 + 4y$$
$$-19y = -95$$
$$y = 5.$$

3º Sustitúyase en (3) o en (4) el valor hallado para y:

$$x = \frac{10 + 10}{5} = 4.$$

Resolver el sistema

$$11x - 7y = 37, \quad (1)$$
$$8x + 9y = 41. \quad (2)$$

Se va a eliminar y.

1º Despéjese el valor de y en (1) y en (2); se obtiene:

$$y = -\frac{37 - 11x}{7}; \quad (3)$$
$$y = \frac{41 - 8x}{9}. \quad (4)$$

2º Iguálense las dos expresiones que representan el valor de y:

$$-\frac{37 - 11x}{7} = \frac{41 - 8x}{9}.$$

Procediendo como antes, se obtiene:

$$-333 + 99x = 287 - 56x$$
$$155x = 620$$
$$x = 4.$$

3º Sustitúyase en (3) o en (4) el valor hallado para x:

$$y = -\frac{37 - 44}{7} = -\frac{-7}{7} = 1.$$

238. Regla. *Para resolver un sistema de dos ecuaciones simultáneas, eliminando por el método de igualación:*

1º *Despéjese, en cada ecuación, la incógnita que se quiere eliminar.*

2º *Iguálense las expresiones que representan el valor de la incógnita eliminada.*

3º *Resuélvase la ecuación que resulta, con lo cual se obtiene el valor de la incógnita no eliminada.*

4º *Sustitúyase el valor hallado en una de las expresiones que representa el valor de la otra incógnita, y resuélvase.*

EJERCICIO 43

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, eliminando por el método de igualación.

1. $x + y = 12$, $x - y = 8$.

2. $5x - 40 = 2y$, $5y - 26 = 2x$.

3. $4x - 5y = 2$, $5x + 3y = 21$.

4. $6x + 2y = -3$, $5x - 3y = -6$.

5. $2y - 11x = 67$, $2x + 5y = 20$.

6. $12x - 5y = 10$, $30x + 11y = -69$.

7. $3x + 7y = 2$,
$7x + 8y = -2$.

8. $5x - 24y = -123$,
$19x - 36y = -81$.

9. $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$,
$5x - 4y = -3$.

10. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{4}{3}$,
$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$.

11. $\frac{26 - 3y}{4} = x$,
$\frac{19 - 8y}{7} = x$.

12. $22x + 15y = 9$,
$18x + 25y = 71$.

13. $x = 2 + 6y$,
$3y - 8x = 29$.

14. $5y - 3x - 72 = 5x$,
$15x = y - 1$.

15. $5r - 8s = 7$,
$r = 1 + s$.

16. $6m = 75 - 3n$,
$m = -n$.

17. $8u - 7v = 17\frac{1}{3}$,
$u = 3v - \frac{2}{3}$.

18. $8x - 5y = 3 - 2y$,
$2x = y - 1$.

19. $7x - 6 = 5y - 28$,
$2 + y = 3x$.

20. $\frac{x}{5} + y = 8$,
$x = 5y$.

21. $8x - \frac{3y}{5} = 1$,
$5x = 2y$.

22. $\frac{1+y}{4} - \frac{x+3}{12} = \frac{3}{4}$,
$x = 1 + y$.

RESOLUCION POR ELIMINACION

(Continuación).

239. Eliminación por sustitución. **Resolver el sistema**

$$4x + 3y = 22, \quad (1)$$
$$5x - 7y = 6. \quad (2)$$

Se va a eliminar x.

1º Despéjese el valor de x en (1):

$$4x = 22 - 3y$$
$$x = \frac{22 - 3y}{4}. \quad (3)$$

2º Sustitúyase este valor en (2):

$$5 \times \frac{22 - 3y}{4} - 7y = 6$$
$$5(22 - 3y) - 28y = 24$$

$$110 - 15y - 28y = 24$$
$$-43y = -86$$
$$y = 2.$$

3º Sustitúyase en (3) el valor hallado para y:

$$x = \frac{22 - 6}{4} = 4.$$

Resolver el sistema

$$2x + 3y = 13, \quad (1)$$
$$5x - 6y = -8. \quad (2)$$

Se va a eliminar y.

1º Despéjese el valor de y en (1):

$$3y = 13 - 2x$$
$$y = \frac{13 - 2x}{3}. \quad (3)$$

2º Sustitúyase este valor en (2):

$$5x - 6 \times \frac{13 - 2x}{3} = -8$$
$$5x - 2(13 - 2x) = -8$$
$$5x - 26 + 4x = -8$$
$$9x = 18$$
$$x = 2.$$

3º Sustitúyase en (3) el valor hallado para x:

$$y = \frac{13 - 4}{3} = 3.$$

240. Regla. *Para resolver un sistema de dos ecuaciones, eliminando por el método de sustitución:*

1º ***Despéjese una incógnita en una de las dos ecuaciones.***

2º ***Sustitúyase la expresión que representa su valor en la otra ecuación.***

3º ***Resuélvase la nueva ecuación, con lo cual se obtiene el valor de la incógnita no eliminada.***

4º ***Sustitúyase el valor así hallado en la expresión que representa el valor de la otra incógnita, y resuélvase la ecuación resultante.***

EJERCICIO 44

1. Si $y = 6$, ¿cuál es el valor de x en $2y + x = 16$?
2. Si $x = 4$, ¿cuál es el valor de y en $x + 3y = 16$?
3. Si $y = 7$, ¿cuál es el valor de x en $x + 2y = 19$?
4. Si $x = y$, ¿cuál es el valor de y en $x + 2y = 6$?
5. Si $x = y$, ¿cuál es el valor de x en $3x + 2y = 15$?
6. Si $x = 2y$, ¿cuál es el valor de y en $x + 2y = 8$?

Resolver los siguientes sistemas, eliminando por el método de sustitución.

7. $x + y = 23$, $x - y = 7$.
8. $2x + y = 3$, $3x - 7y = 30$.
9. $2x = 8 - 4y$, $7x - 12 = 2y$.
10. $4x + 5y = 104$, $5x + 3y = 84$.
11. $5x - 7y = -1$, $3x + 4y = 24$.
12. $5y + x = 7$, $5x - 3y = 3 + 2x$.
13. $5x + 8y = -1$, $6y - x = 4y - 7$.
14. $x - y = 37$, $2x + 3y = 31x + 13y$.
15. $2x - y = y + 6$, $x + 2y = 4y + 3$.
16. $x - y = 1$, $\frac{2x}{5} + \frac{3y}{4} = 5$.
17. $\frac{x+y}{5} = \frac{x-y}{3}$, $x - 4 = 2y$.
18. $\frac{7x - 15}{3} = y$, $2x - y = 3$.
19. $x - 4y = 2$, $3x - 3y = 24$.
20. $9m + 2n = 140$, $m + 5n = 135$.
21. $10p + 7q = 19$, $2p = 6q - 11$.
22. $3a - 8b = -5$, $a = 2b$.
23. $5z - 7 = 2v + 15$, $3z = 6v + 18$.
24. $.06x = .02t + .74$, $.04x + .03t = .84$.

241 **Observaciones.** 1ª Cuando se resuelve un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de *adición*, escójanse números tales que multiplicados por los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar, den como producto el m. c. m. de dichos coeficientes.

2ª En el método de *sustitución*, despéjese la incógnita que tenga menor coeficiente.

3ª En la resolución de un sistema dado, puede usarse indistintamente uno cualquiera de los tres métodos estudiados, y cada uno tiene sus ventajas según los casos particulares.

Sin embargo, como los dos últimos procedimientos introducen, por lo general, expresiones fraccionarias, se usa con preferencia el método por *adición* o *sustracción*, por ser el más sencillo.

III. RESOLUCION DE ECUACIONES LITERALES SIMULTANEAS

242. Ejemplo. Resolver el sistema

$$ax + by = c, \quad (1)$$
$$a'x + b'y = c'. \quad (2)$$

Si se quiere eliminar y, por el método de *reducción*, multiplíquese la (1) por b' y la (2) por b:

$$ab'x + b'by = b'c, \quad (3)$$
$$a'bx + b'by = bc'. \quad (4)$$

Réstese (4) de (3): $ab'x - a'bx = b'c - bc'$.

Póngase x en factor: $x(ab' - a'b) = b'c - bc'$.

De donde: $x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}$.

Puede sustituirse ahora, en una cualquiera de las ecuaciones propuestas, el valor hallado para x, o bien calcular directamente y; para esto:

Tratándose de eliminar x, multiplíquese la (1) por a' y la (2) por a:

$$a'ax + a'by = a'c, \quad (5)$$
$$a'ax + ab'y = ac'. \quad (6)$$

Réstese (6) de (5): $a'by - ab'y = a'c - ac'$.

Póngase y en factor: $y(a'b - ab') = a'c - ac'$.

De donde: $y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}$.

COMPROBACIÓN:

$$a \times \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} + b \times \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} = c$$

$$\frac{ab'c - abc'}{ab' - a'b} + \frac{a'bc - abc'}{a'b - ab'} = c.$$

Multiplíquense por (-1) ambos términos del segundo quebrado para que los denominadores resulten iguales, y simplifíquese:

$$\frac{ab'c - abc'}{ab' - a'b} + \frac{abc' - a'bc}{ab' - a'b} = c$$

$$\frac{ab'c - abc' + abc' - a'bc}{ab' - a'b} = c$$

$$\frac{ab'c - a'bc}{ab' - a'b} = \frac{c(ab' - a'b)}{ab' - a'b} = c$$

$$c = c.$$

Para resolver ecuaciones literales simultáneas, se procede como en los sistemas de ecuaciones simultáneas con coeficientes numéricos.

IV. RESOLUCION DE ECUACIONES SIMULTANEAS CON INCOGNITAS EN LOS DENOMINADORES

243. Ejemplos de resolución. **Sea resolver el sistema**

$$\frac{8x + 24y}{y - 2x} = 3, \qquad (1)$$

$$\frac{x - 7y}{x + 2y + 2} = 17. \qquad (2)$$

Multiplíquense, en (1), ambos miembros por $y - 2x$, y por $x + 2y + 2$, en (2); se obtiene:

$$8x + 24y = 3y - 6x,$$

$$x - 7y = 17x + 34y + 34.$$

Es decir:

$$14x + 21y = 0, \qquad (3)$$

$$-16x - 41y = 34. \qquad (4)$$

Multiplíquese la (3) por 8 y la (4) por 7:

$$112x + 168y = 0$$

$$-112x - 287y = 238$$

Sumando

$$-119y = 238$$

$$y = -2.$$

Sustitúyase este valor en (3), y resulta:

$$14x + 21(-2) = 0$$

$$14x = 42$$

$$x = 3.$$

Resolver el sistema siguiente:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2, \qquad (1)$$

$$\frac{20}{x} - \frac{21}{y} = 3. \qquad (2)$$

PRIMER PROCEDIMIENTO.

Multiplíquese la (1) por 7: $\frac{14}{x} + \frac{21}{y} = 14.$ (3)

Súmese la (2) con la (3): $\frac{34}{x} = 17.$

De donde: $\frac{1}{x} = \frac{17}{34} = \frac{1}{2}$

$$x = 2.$$

Sustitúyase en (1) el valor hallado para x, y se obtiene:

$$1 + \frac{3}{y} = 2$$

$$y = 3.$$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO.

El sistema propuesto puede escribirse:

$$2\frac{1}{x} + 3\frac{1}{y} = 2, \qquad (1)$$

$$20.\frac{1}{x} - 21.\frac{1}{y} = 3. \qquad (2)$$

Hágase $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$, con lo cual el sistema anterior se transforma en:

$$2x' + 3y' = 2, \qquad (3)$$

$$20x' - 21y' = 3. \qquad (4)$$

Resuélvase este sistema, y se obtiene:

$x' = \frac{1}{2}$; de donde: $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, o sea: $x = 2$

$y' = \frac{1}{3}$; de donde: $\frac{1}{y} = \frac{1}{3}$, o sea: $y = 3$.

Como se ve, estos casos se resuelven a veces por medio de *artificios* algebraicos, en vez de seguir los procedimientos ordinarios.

EJERCICIO 45

Resolver, eliminando por el método que mejor convenga, los siguientes sistemas:

1. $x + y = 22$,
   $x - 2y = 1$.
2. $4y - 6z + 10 = 0$,
   $8y + 18z - 70 = 0$.
3. $9x + 3y = 48$,
   $9x - 5y = 16$.
4. $15x - 8y = 185$,
   $7x - 8y = 65$.
5. $7z + 2u = 31$,
   $5z + 3u = 30$.
6. $93 - 21v = 6z$,
   $60 - 10v = 6z$.
7. $5u - (8z + 16) = 0$,
   $3u + (2z - 30) = 0$.
8. $4x - 5y = 45$,
   $7x - 3y = 96$.
9. $3x + 2y = 32$,
   $3x - 4y = -10$.
10. $2x + y = 7$,
    $5x - 3y = 1$.
11. $6x + 7y = 79$,
    $5x - 11y = 49$.
12. $4x + 3y = 40$,
    $6x + 7y = 100$.
13. $\frac{x}{2} = 2$,
    $2x - y = 12$.
14. $\frac{1}{x - y} = 12$,
    $\frac{y}{x} = \frac{8}{9}$.
15. $5x - \frac{2}{3}y = 434$,
    $7x + 3y = 997$.
16. $\frac{7x}{3} - 2y = 29$,
    $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 4.75$.
17. $\frac{y}{2} - \frac{x}{5} - 2 = 0$,
    $y - \frac{3x}{5} - 2 = 0$.
18. $\frac{3y}{4} - \frac{2x}{5} - 1 = 0$,
    $2x + 3y - 22 = 0$.
19. $3y + 5x = 126\,245$,
    $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$.

20. $\frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{2} = 3$,
    $12x - 7y = 33$.
21. $\frac{x+y}{5} = \frac{x-y}{3}$,
    $\frac{x}{2} = y + 2$.
22. $\frac{x+1}{y} = \frac{1}{4}$,
    $\frac{y+1}{x} = \frac{1}{5}$.
23. $2x + \frac{y-2}{5} = 21$,
    $4y + \frac{x-4}{6} = 29$.
24. $x - y = 2$,
    $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$.
25. $10z - 5v - 100 = 0$,
    $\frac{z}{v} = 5.5$.
26. $\frac{3x}{4} - \frac{4u}{5} - 14 = 0$,
    $\frac{x}{10} + \frac{5u}{4} - 29 = 0$.
27. $\frac{v}{5} + 1 = \frac{t}{4} + 2$,
    $\frac{3t+16}{5} = \frac{2v-6}{3}$.
28. $\frac{3x}{10} - 9 = \frac{y}{3}$,
    $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 13$.
29. $\frac{z+u}{4} + \frac{z-u}{2} = 3$,
    $\frac{z+u}{4} - \frac{z-u}{2} = 1$.
30. $\frac{z+1}{v} = \frac{1}{4}$,
    $\frac{z}{v+1} = \frac{1}{5}$.
31. $x + \frac{y-2}{10} = \frac{134}{5}$,
    $y - \frac{x-4}{24} = \frac{153}{8}$.
32. $x + \frac{y}{6} = \frac{55}{18}$,
    $\frac{x}{y} = 9$.
33. $3(x + y) + 4(x - y) = 120$,
    $3(x + y) - 4(x - y) = 120$.
34. $x + y = 2a$,
    $x - y = 2b$.
35. $x + 2y = a$,
    $x + 3y = b$.
36. $x + y = a$,
    $\frac{1}{c} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$.
37. $y = bx$,
    $x + 2y = a$.
38. $\frac{x}{a} - y = 1$,
    $\frac{y}{b} - x = 1$.
39. $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 2$,
    $ax = by$.
40. $x + y = a$,
    $bx - cy = a(b - c)$.
41. $x + y = a + b$,
    $ax + by = 2ab$.
42. $ax = 2by$,
    $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 3$.
43. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2a$,
    $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2b$.

44. $ax + by = 2(a+b)$,
$ax - by = 2(a-b)$.

45. $\frac{x+2}{2} - \frac{x-y}{3} = 8$,
$\frac{x+y}{3} - \frac{x-y}{4} = 11$.

46. $\frac{x-y}{2} = \frac{25}{6} - \frac{x+y}{3}$,
$\frac{x+y-9}{2} - \frac{y-x-6}{5} = 0$.

47. $\frac{x}{x+1} = \frac{2y}{2y-3}$,
$\frac{3}{x-1} + \frac{5}{y+2} = 0$.

48. $\frac{4}{x-y} + \frac{6}{x+y} = \frac{36}{x^2-y^2}$,
$\frac{3}{2x-y} - \frac{2}{x-3y} = \frac{-18}{(2x-y)(x-3y)}$.

49. $\frac{3x+2}{3y-5} = \frac{x+1}{y-1}$,
$\frac{3x-2}{y+1} = \frac{3x-1}{y-1} - \frac{2}{(y-1)(y+1)}$.

50. $\frac{2x-1}{x+1} - \frac{3y-1}{y+1} = \frac{-xy}{(x+1)(y+1)}$,
$\frac{x+2}{2y-1} + \frac{2x-1}{y+1} = \frac{5xy}{(2y-1)(y+1)}$.

51. $\frac{4}{x} - \frac{7}{y} = -13$,
$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 12$.

52. $\frac{5}{z} - \frac{6}{v} = 2$,
$\frac{17}{v} - \frac{4}{z} = 67$.

53. $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 21$,
$\frac{7}{x} - \frac{9}{y} = -19$.

54. $\frac{12}{x} - \frac{10}{y} = 1$,
$\frac{9}{x} + \frac{2}{y} = 15$.

55. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 20$,
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 30$.

56. $\frac{7}{x} - \frac{1}{y} = 12.5$,
$\frac{3}{x} + \frac{12}{y} = 24$.

V. RESOLUCION DE ECUACIONES SIMULTANEAS CON MAS DE DOS INCOGNITAS

244. Eliminación por suma o resta. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 6y - 5z &= -11, && (1)\\ 10x + 9y - 3z &= 50, && (2)\\ 4x - 8y + z &= 15. && (3)\end{aligned}$$

Se va a eliminar z.

Para eso, multiplíquese la (2) por 5 y la (1) por 3:

$$\begin{array}{rl} & 50x + 45y - 15z = 250 \\ & 6x - 18y - 15z = -33 \\ \hline \text{Restando:} & 44x + 63y \quad = 283. \end{array} \qquad (4)$$

Multiplíquese la (3) por 3 y combínesela con la (2):

$$\begin{array}{rl} & 10x + 9y - 3z = 50 \\ & 12x - 24y + 3z = 45 \\ \hline \text{Sumando:} & 22x - 15y \quad = 95. \end{array} \qquad (5)$$

Con las ecuaciones (4) y (5) fórmese el sistema

$$\begin{aligned} 44x + 63y &= 283,\\ 22x - 15y &= 95,\end{aligned}$$

que, como se ve, sólo contiene dos incógnitas.

Multiplíquese la segunda ecuación por 2 para eliminar x:

$$\begin{array}{rl} & 44x + 63y = 283 \\ & 44x - 30y = 190 \\ \hline \text{Réstese:} & 93y = 93 \\ & y = 1. \end{array}$$

Sustitúyase este valor en (5):

$$22x - 15 = 95$$
$$x = \frac{95+15}{22} = 5.$$

Sustitúyanse en (1) los valores hallados para x y para y:

$$10 - 6 - 5z = -11$$
$$z = \frac{11-6+10}{5} = 3.$$

Las raíces del sistema son, por tanto: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

245. Eliminación por igualación. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 8, && (1)\\ 2x - 3y + z &= -1, && (2)\\ 3x - y + 2z &= 11. && (3)\end{aligned}$$

Se va a eliminar x.

Despéjese x en (1) y (2):

$$x = 8 + 2y - 3z. \qquad (4)$$
$$x = \frac{-1+3y-z}{2}.$$

Iguálense estos valores; después de reducir se obtiene:

$$y - 5z = -17. \qquad (5)$$

Despéjese x en (3):

$$x = \frac{11 + y - 2z}{3}.$$

Iguálese este valor con (4) y redúzcase:

$$5y - 7z = -13. \qquad (6)$$

Con las ecuaciones (5) y (6) fórmese el sistema

$$y - 5z = -17,$$
$$5y - 7z = -13.$$

Despéjese y en las dos ecuaciones:

$$y = 5z - 17, \qquad (7)$$
$$y = \frac{7z - 13}{5}.$$

Iguálense estos valores y redúzcase:

$$5z - 17 = \frac{7z - 13}{5}.$$
$$18z = 72$$
$$z = 4.$$

Sustitúyase este valor en (7):

$$y = 20 - 17 = 3.$$

Sustitúyanse en (4) los valores hallados para z y para y:

$$x = 8 + 6 - 12 = 2.$$

Las raíces del sistema son, por tanto: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$

246. Eliminación por sustitución.

$$2x - 3y + 4z = 20, \qquad (1)$$
$$4x + 2y - 3z = 11, \qquad (2)$$
$$3x + 4y + 2z = 53. \qquad (3)$$

Se va a eliminar x.

Despéjese el valor de x en (1):

$$x = \frac{20 + 3y - 4z}{2} \qquad (4)$$

Sustitúyase este valor en (2) y (3):

$$4 \times \frac{20 + 3y - 4z}{2} + 2y - 3z = 11, \qquad (5)$$
$$3 \times \frac{20 + 3y - 4z}{2} + 4y + 2z = 53. \qquad (6)$$

Efectúense las operaciones indicadas y redúzcase:

$$8y - 11z = -29, \qquad (7)$$
$$17y - 8z = 46. \qquad (8)$$

Despéjese z en (7):

$$z = \frac{29 + 8y}{11}. \qquad (9)$$

Sustitúyase este valor en (8) y despéjese y:

$$17y - 8 \times \frac{29 + 8y}{11} = 46$$
$$123y = 738$$
$$y = 6.$$

Sustitúyase este valor en (9):

$$z = \frac{29 + 48}{11} = \frac{77}{11} = 7.$$

Sustitúyanse en (4) los valores hallados para y y z:

$$x = \frac{20 + 18 - 28}{2} = 5.$$

Las raíces del sistema son, por consiguiente: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \\ z = 7 \end{cases}$

247. Regla para resolver sistemas con más de dos incógnitas. *Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas,*

1º *Combínense dos ecuaciones para eliminar una incógnita, empleando uno cualquiera de los métodos de eliminación ya explicados; se obtiene así una sola ecuación con dos incógnitas.*

2º *Combínese después la ecuación restante en el sistema con cualquiera de las dos primeras, de modo que resulte otra ecuación que contenga las dos mismas incógnitas que han quedado por la eliminación anterior.*

3º *Fórmese, con las ecuaciones obtenidas en las dos eliminaciones, un nuevo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.*

4º *Resuélvase el sistema así formado, con lo cual se obtienen los valores de las dos incógnitas.*

5º *Sustitúyanse éstas por sus valores en cualquiera de las ecuaciones del sistema, y calcúlese el valor de la otra incógnita.*

6º *Procédase de manera semejante cuando el número de ecuaciones e incógnitas es superior a tres.*

EJERCICIO 46

Resolver estos sistemas por cualquiera de los métodos explicados.

1. $x-y+z=7$, $x+y-z=1$, $y+z-x=3$.
2. $2x+y-3z=5$, $x+2y+z=11$, $3x-y+2z=4$.
3. $x+y=z$, $2x+z=y+9$, $5x-2y=z-6$.
4. $x+y=z+14$, $x-y=6-z$, $y-x=-(4+z)$.
5. $x+y+z=11$, $2x-y+z=5$, $3x+2y+z=24$.
6. $9x-2y+12z=20$, $6x+4y-3z=3$, $3x+2y-3z=-1$.
7. $\frac{x}{3}+y+\frac{2z}{3}-\frac{11}{3}=0$, $x+\frac{2y}{3}+\frac{z}{3}-\frac{11}{3}=0$, $\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}+z-\frac{14}{3}=0$.
8. $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+z=4$, $\frac{3x}{6}-\frac{11y}{2}+z=4.5$, $\frac{x}{5}-y+\frac{z}{5}=1.20$.
9. $\frac{8x}{15}-\frac{7y}{6}+\frac{11z}{12}=\frac{7}{2}$, $\frac{3x}{4}-\frac{4y}{5}+\frac{8z}{9}=5+\frac{53}{60}$, $9x-\frac{3y}{4}=42$.
10. $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$, $1.5x+y+4z=50.5$.
11. $3x+6y-2z+9u=6$, $4y-5x+5z-6u=5$, $2z-3x+8y-3u=3$, $9u+10y+3z-4x=9$.
12. $x-2y+3z-4u=-8$, $y-2z+3u-4x=6$, $z-2u+3x-4y=-8$, $u-2x+3y-4z=-2$.

VI. PROCEDIMIENTOS ESPECIALES PARA LA RESOLUCION DE CIERTOS SISTEMAS

248. Artificios de cálculo. Según lo que va expuesto en este capítulo, el método que más comúnmente se sigue, para resolver sistemas de ecuaciones, es el de *eliminación*.

Hay, sin embargo, algunos sistemas para cuya resolución es preferible, en vez de recurrir a la *eliminación*, emplear *procedimientos especiales*, por prestarse los sistemas propuestos a ciertas simplificaciones mediante las cuales se llega más fácil y rápidamente a la solución.

Estos procedimientos se llaman artificios de cálculo.

A continuación se exponen algunos de los más sencillos y prácticos.

249. Ejemplos de artificios de cálculo. — 1º Resolver el sistema

$$u+x+y=6, \quad (1)$$
$$x+y+z=7, \quad (2)$$
$$y+z+u=8, \quad (3)$$
$$z+u+x=9. \quad (4)$$

Súmese: $3u+3x+3y+3z=30$

Divídase entre 3: $u+x+y+z=10$. (5)

Réstese (2) de (5): $u=3$.

Réstese (3) de (5): $x=2$.

Réstese (4) de (5): $y=1$.

Réstese (1) de (5): $z=4$.

2º Resolver el sistema

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}, \quad (1)$$
$$x+y+z=m. \quad (2)$$

La serie de razones iguales da:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{m}{a+b+c}$$

Iguálese cada uno de los quebrados de (1) con $\frac{m}{a+b+c}$ y resuélvase:

$$\frac{x}{a}=\frac{m}{a+b+c}\,;\quad x=\frac{am}{a+b+c}.$$
$$\frac{y}{b}=\frac{m}{a+b+c}\,;\quad y=\frac{bm}{a+b+c}.$$
$$\frac{z}{c}=\frac{m}{a+b+c}\,;\quad z=\frac{cm}{a+b+c}.$$

3º Resolver el sistema

$$x-y=4, \qquad (1)$$
$$x^2-y^2=40. \qquad (2)$$

La (2) puede escribirse: $(x+y)(x-y)=40.$ (3)

Divídase la (3) entre la (1) y simplifíquese:

$$\frac{(x+y)(x-y)}{x-y}=\frac{40}{4}.$$
$$x+y=10. \qquad (4)$$

Súmense miembro a miembro (1) y (4):

$$2x=14;\quad x=7.$$

Réstese (1) de (4): $2y=6;\quad y=3.$

EJERCICIO 47

Resolver los siguientes sistemas con ayuda de los artificios explicados.

1. $x+y=16,\ x+z=22,\ y+z=28.$

2. $y+z=8,\ z+u=9,\ u+v=11,\ x+v=9,\ x+y=5.$

3. $u+x+y=7,\ x+y+z=-8,\ y+z+u=5,\ z+u+x=-10.$

4. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20},\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}.$

5. $x-y=1,\ x^3-y^3=21.$

6. $x+y=19,\ x^3-y^3=95.$

7. $\frac{x}{2}=y=\frac{z}{6},\ 3x+5y+z=34.$

8. $\frac{x}{5}=\frac{y}{6}=\frac{z}{7}=\frac{v}{8},\ x+y+z+v=234.$

9. $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}=\frac{7}{12},\ \frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=\frac{5}{12}.$

VII. DIFERENTES CLASES DE SISTEMAS

250. Sistema consistente o determinado. Sea el sistema

$$y+2x=8,$$
$$y-x=-1.$$

La solución de este sistema es $x=3,\ y=2.$

La gráfica correspondiente señala el punto $P(3,2)$ como intersección de las rectas que representan las ecuaciones dadas (fig. 42).

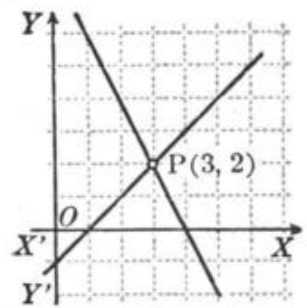


Fig. 42.—Gráfica del sistema y+2x=8, y−x=−1.

En casos como éste se dice que las ecuaciones son *independientes*, o sea que ninguna de ellas se ha obtenido multiplicando ambos miembros de la otra por un mismo número, o dividiéndolos entre un mismo divisor.

Un sistema de dos ecuaciones independientes se llama consistente o determinado, y queda representado por dos rectas que se cortan.

251. Sistema inconsistente o incompatible. Sea el sistema

$$y-2x=4, \qquad (1)$$
$$2y-4x=-4. \qquad (2)$$

Multiplíquese (1) por 2:

$$2y-4x=8. \qquad (3)$$

Réstese (2) de (3):

$$0=12,$$

lo cual es imposible.

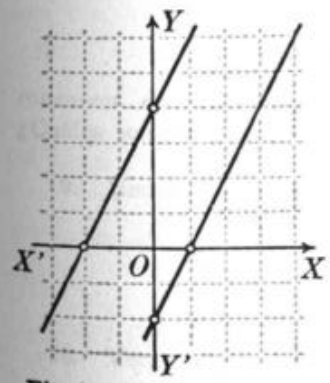


Fig. 43.—Gráfica del sistema y−2x=4, 2y−4x=−4.

Si se representa gráficamente el sistema, resultan *dos rectas paralelas* (fig. 43). Tienen, en efecto, *el mismo coeficiente angular*, 2, y forman, por tanto, ángulos iguales con el eje $X'X$.

Siendo paralelas las rectas, no tienen intersección, o sea, el sistema *no tiene solución.*

Las dos ecuaciones *son independientes*, pero *no simultáneas*; en efecto, despejando y en cada una de ellas, se obtiene:

$$y = 2x + 4,$$
$$y = 2x + 1.$$

La incógnita y no tiene el mismo valor en las dos ecuaciones; el sistema no tiene solución.

En casos como éste se dice que el sistema es inconsistente o incompatible.

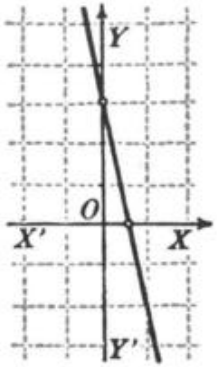


Fig. 44. — G. de $y + 5x = 3$, $2y + 10x = 6$.

252. Sistema indeterminado. Sea el sistema

$$y + 5x = 3, \quad (1)$$
$$2y + 10x = 6, \quad (2)$$

en que (2) resulta de multiplicar (1) por 2.

En este caso, todo par de valores que satisfaga la primera, satisface igualmente la segunda. No existiendo un par de valores único que satisfaga las dos ecuaciones, sino tantos pares como se quiera, se dice que *el sistema es indeterminado*.

La gráfica del sistema es *una sola recta* (fig. 44), o dos rectas superpuestas.

Resumiendo:

Las ecuaciones $\begin{cases} y + 5x = 3, \\ 2y + 10x = 6, \end{cases}$

son *simultáneas*, pero no independientes.

Las ecuaciones $\begin{cases} y - 2x = 4, \\ 2y - 4x = -4, \end{cases}$

son *independientes*, pero no simultáneas.

Las ecuaciones $\begin{cases} y + 2x = 8, \\ y - x = -1, \end{cases}$

son *independientes* y *simultáneas*.

Para que un sistema de dos ecuaciones admita únicamente una solución, se necesita que las dos ecuaciones sean independientes y simultáneas.

EJERCICIO 48

Represéntense gráficamente los sistemas siguientes, y hállense las coordenadas del punto de intersección de las rectas, o sea, la solución del sistema.

1. $y = x - 2$, $y = 3x - 10$.
2. $y = 2x + 7$, $y = 1 - x$.
3. $y = 2x + 3$, $y = -x - 1$.
4. $2y = x - 5$, $y = 2x - 7$.
5. $3y - 1 = 4x$, $5y + 3x = 21$.
6. $y + x + 2 = 0$, $y = 2x + 7$.

7. Verifíquese que el sistema

$$y = 2x + 3,$$
$$y = 2x - 4,$$

es imposible, por ser paralelas las rectas que lo representan.

8. Verifíquese que las rectas que representan las ecuaciones

$$y - x = 1,$$
$$y - 3x = -3,$$
$$y + 2x = 7,$$

concurren en el mismo punto, es decir, tienen unas mismas raíces. ¿Cuáles son estas raíces?

9. Misma pregunta con respecto a las ecuaciones

$$y - 2x - 5 = 0,$$
$$y + x - 2 = 0,$$
$$y - 5x - 8 = 0.$$

10. Verificar que las ecuaciones

$$5y = 2x + 6,$$
$$3y + 2x = 26,$$
$$y + 2 = 2x,$$

no concurren en el mismo punto, sino que forman un triángulo.

EJERCICIO 49

Problemas que dan lugar a un sistema de ecuaciones con dos o más incógnitas.

Se resuelven a continuación algunos problemas, para facilitar la resolución de los demás.

1. *Dividir el número* 1 000 *en dos partes tales que si de los* $^5/_6$ *de la primera se resta* $^1/_4$ *de la segunda, se obtiene* 10.

Primera parte: x.

Segunda parte: y.

Según el enunciado:
$$x + y = 1\,000,$$
$$\frac{5}{6}x - \frac{1}{4}y = 10.$$

La resolución de este sistema da: $x = 240$, $y = 760$.

Las dos partes son 240 y 760.

2. Dividir 132 en dos partes tales que los 5 séptimos de la una y los 3 quintos de la otra, sumen 88.

3. El cociente de dos números es 5, y su diferencia 108. ¿Cuáles son esos números?

4. La suma de dos números es 65; su diferencia, dividida entre el número menor, da 8 por cociente y 5 de residuo. ¿Cuáles son esos números?

5. Hallar dos números cuya suma y cuyo cociente sean respectivamente 169 y 12.

6. ¿Cuál es el quebrado que se iguala a 1 quinto o a 1 sexto, según que se añada 1 al numerador o al denominador?

7. Añadiendo 1 a ambos términos de un quebrado, se hace igual a 2 tercios; restándole ese mismo número, se vuelve 1 medio. ¿Cuál es el quebrado?

8. Hállense dos números que den por suma, diferencia y producto, números respectivamente proporcionales a 5, 3 y 8.

9. Añadiendo el primero de dos números a la mitad del segundo, o añadiendo el segundo al tercio del primero, la suma da 10 en ambos casos. ¿Cuáles son los números?

10. Dividir 180 en 3 partes, de modo que la mitad de la primera, el tercio de la segunda y el cuarto de la tercera, sean 3 números iguales.

11. ¿Cuál es el quebrado que se iguala a 1 tercio o a 1 cuarto, según que se añada 1 al numerador o al denominador?

12. Dividir cada uno de los números 80 y 90 en dos partes tales que la suma de una de las partes correspondientes a 80 con una de las de 90, dé 100, y la resta de las otras dos, dé 30.

13. Hallar tres números, A, B, C, tales que A con la mitad de B, B con el tercio de C, y C con el cuarto de A, sea cada uno igual a 1 000.

14. El duplo del mayor de dos números, dividido entre el menor, da 3 por cociente y 7 de residuo; el quíntuplo del menor, dividido entre el mayor, da 2 por cociente y 23 de residuo. ¿Cuáles son esos números?

15. Triplicando el numerador de un quebrado y aumentando en 8 el denominador, el quebrado vale 9 octavos; dividiendo el denominador entre 2 y disminuyendo en 7 el numerador, el valor del quebrado es 1 cuarto. Hallar el quebrado.

16. El perímetro de un rectángulo es de 300 m. La base tiene 30 m más que la altura. Hállense las dimensiones del rectángulo.

17. *Pedro y Pablo tienen cada uno cierto número de pesos. Si Pablo da* \$ 12 *a Pedro, tendrán ambos igual cantidad; si, por el contrario, Pedro da* $^3/_5$ *de su dinero a Pablo, el número de pesos de éste queda aumentado en sus* $^3/_8$. *¿Cuántos pesos tiene cada uno?*

Número de pesos de Pedro: x.

Número de pesos de Pablo: y.

Según el enunciado:
$$x + 12 = y - 12,$$
$$y - x = 24. \qquad (1)$$
$$y + \frac{3}{5}x = y + \frac{3}{8}y,$$
$$8x = 5y. \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2), se obtiene:
$$x = 40, \quad y = 64.$$

Pedro tiene \$ 40 y Pablo, \$ 64.

18. Pablo dijo a Emilio: Si me das 40 ¢, lo que tendré será igual a lo que te quede multiplicado por 28. Dame 95 ¢, repuso Emilio, y tendremos igual los dos. ¿Cuánto tiene cada uno?

19. Si al dinero que tiene A se le añaden \$ 36, tendrá el triple de lo que tiene B; y si a B se le quitan \$ 5, tendrá la mitad de lo que tiene A. ¿Cuánto tiene cada uno?

20. Si M da \$ 12 a N, N tendrá 9 quintos del dinero de M; si N da \$ 12 a M, éste tendrá 4 tercios de lo que tiene N. ¿Cuánto tiene cada uno?

21. *Un número entero consta de tres dígitos. El dígito de las centenas es la suma de los otros dos, y el quíntuplo del de las unidades equivale a la suma del de las decenas y del de las centenas. Hállese este número, sabiendo que si se invierten los dígitos, resulta disminuído en* 594.

Dígito de las centenas: x.

Dígito de las decenas: y.

Dígito de las unidades: z.

En el sistema decimal, el número buscado y ese mismo número invertido se expresan, respectivamente:

$$100x + 10y + z \quad \text{y} \quad 100z + 10y + x.$$

Según el enunciado:

$$x = y + z, \tag{1}$$

$$5z = x + y, \tag{2}$$

$$100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 594,$$

$$x - z = 6. \tag{3}$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) forman el sistema

$$\begin{aligned} x &= y + z, \\ x &= 5z - y, \\ x &= z + 6, \end{aligned}$$

cuya resolución da: $x = 9$, $y = 6$, $z = 3$.

El número buscado es 963.

22. La suma de los dos dígitos de un número entero es 15. Si se invierte el orden de los dígitos se obtiene otro número igual al primero multiplicado por $^{23}/_{32}$. Hállese el número.

23. En un número entero de tres dígitos, el dígito de las centenas con el de las unidades, suman 10; el de las decenas con el de las unidades, 12; el de las decenas con el de las centenas, 6. Hallar el número.

24. Un número entero consta de tres dígitos, cuya suma es igual al triple del dígito de las decenas. Hallar ese número, sabiendo que disminuye en 198 si se toma invertido, y que el dígito de las unidades es la mitad del de las centenas.

25. Un número entero tiene dos dígitos; si se invierten, la suma del número que resulta, con el duplo del número dado, es 204; y si se divide el número entre la suma de sus dígitos, el cociente es 7 y el residuo 6. Hallar el número.

26. Cierto número entero, dividido entre la suma de sus dos dígitos, da 4 por cociente y 3 de residuo. Se invierten luego los dígitos y se añade 23 al número que resulta, y esta suma se divide entre el número dado, obteniéndose 2 por cociente. ¿Cuál es el número?

27. La suma de los tres dígitos de un número entero es 17. La suma del triple del primer dígito, con el quíntuplo del segundo y el cuádruplo del tercero, da 70; si se añade 297 al número, los dígitos resultan invertidos. Hállese el número.

28. Newton nació en el siglo XVII, y murió en el XVIII. Se quiere saber el año de su nacimiento y el de su muerte, sabiendo que el número formado por los dos últimos dígitos de la fecha del nacimiento, aumentado en 12, es el doble del número formado por los dos últimos dígitos de la fecha de su muerte; y este último número, aumentado en 1, es 2 tercios del primero. (Llámense x y y los números formados por los dos últimos dígitos de la fecha del nacimiento y de la muerte, respectivamente).

29. *Tres personas pueden hacer un trabajo en* 3 *días; la primera y la segunda juntas lo harían en* $^{16}/_{5}$ *de día, y la segunda y la tercera juntas pueden hacerlo en* 12 *días. ¿En cuántos días lo haría cada persona trabajando sola?*

Número de días que emplearía la primera: x.

" " " " " " segunda: y.

" " " " " " tercera: z.

En un día la primera hace $\frac{1}{x}$; la segunda, en el mismo tiempo, $\frac{1}{y}$, y la tercera $\frac{1}{z}$.

Según los datos:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{16},$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12}.$$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$x = 4, \quad y = 16, \quad z = 48.$$

La primera lo haría en 4 días, la segunda en 16 y la tercera en 48.

30. Dos fuentes, manando una 3 días y 5 la otra, han llenado un tanque de 1 200 m³; manando durante 2 y 4 días, respectivamente, han llenado otro tanque de 840 m³. ¿Qué cantidad de agua da cada fuente por día?

31. Tres obreros trabajan en una obra. El primero y el segundo podrían hacerla en 8 días; el primero y el tercero, en 9 días; el segundo y el tercero, en 10 días. ¿Cuánto tiempo tardaría cada uno para hacer esa obra trabajando solo?

32. *Una suma ha sido distribuída en partes iguales entre cierto número de personas. Si hubiera habido 3 personas más, cada una habría recibido \$1 menos; y si hubiese habido 5 personas menos, a cada una le habrían tocado \$3 más. ¿Cuántas personas había y cuánto recibió cada una?*

Número de personas: x.

Número de pesos recibidos por cada una: y.

Número de pesos repartidos: xy.

Si la suma se hubiera repartido entre $x+3$ personas, cada una habría recibido $y-1$ pesos; si el número de personas hubiera sido $x-5$, a cada una le habría tocado $y+3$ pesos.

Por lo tanto, $(x-5)(y+3)$ y $(x+3)(y-1)$ representan en cada caso, la suma repartida.

De donde:
$$(x+3)(y-1)=xy,$$
$$(x-5)(y+3)=xy.$$

La resolución de este sistema da:
$$x=15,\quad y=6.$$

Había 15 personas y cada una recibió \$6.

33. Un tren recorrió cierta distancia con una velocidad uniforme. Si la velocidad hubiera sido de 6 km más, por hora, el viaje habría durado 4 horas menos; pero, si la velocidad hubiera sido de 6 km menos, el viaje habría durado 6 horas más. Hállese la distancia recorrida.

34. Un ganadero vende una partida de 9 caballos y 7 vacas por \$12 000, y otra partida de 6 caballos y 11 vacas al mismo precio y por la misma cantidad. ¿A cómo vendió cada caballo y cada vaca?

35. Teniendo que distribuir \$450 entre cierto número de personas, veo que si doy \$30 a cada hombre y \$20 a cada mujer, me faltarán \$110; pero, si doy \$25 a cada hombre y \$15 a cada mujer, no faltará ni sobrará nada. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres son?

36. El piso de una habitación rectangular es tal que si tuviera 2 m más de ancho y 3 m más de largo, tendría 64 m² más de superficie; pero, si tuviera 3 m más de ancho y 2 m más de largo, la superficie aumentaría en 68 m². Hallar las dimensiones del piso.

37. Una persona compró cierto número de naranjas. Si por el mismo dinero le hubiesen dado 56 naranjas más, cada una le habría resultado a 1¢ menos; pero, si le hubiesen dado 24 naranjas menos, le habría salido a 1¢ más cada una. ¿Cuántas compró y a cómo cada una?

38. Una suma de dinero se divide en partes iguales entre varias personas. Si hubieran sido m personas más, cada una habría recibido \$$a$ menos; pero si hubieran sido n menos, le habrían tocado \$$b$ más. ¿Cuántas personas eran y cuánto recibió cada una?

39. *Cierto capital está dividido en 3 partes, colocadas a interés simple durante 3 años, al 3%, 4% y 5%, respectivamente. Las partes del capital son tales que, al cabo de 3 años, los intereses de la primera y segunda partes juntos, importan \$2 790; los de la primera y tercera, \$3 300, y los de la segunda y tercera, \$3 390. ¿Cuáles son las 3 partes y cuál es el capital?*

Sean x, y, z las partes; el capital es $x+y+z$, y los intereses de las 3 partes, durante 3 años, son respectivamente:
$$\frac{3\times3\times x}{100},\quad \frac{4\times3\times y}{100},\quad \frac{5\times3\times z}{100}.$$

Según el enunciado:
$$\frac{9x}{100}+\frac{12y}{100}=2\,790,$$
$$\frac{9x}{100}+\frac{15z}{100}=3\,300,$$
$$\frac{12y}{100}+\frac{15z}{100}=3\,390.$$

Simplificando:
$$3x+4y=93\,000,$$
$$3x+5z=110\,000,$$
$$4y+5z=113\,000.$$

La resolución de este último sistema da:
$$x=15\,000;\quad y=12\,000;\quad z=13\,000.$$

Las 3 partes son: \$15 000, \$12 000 y \$13 000; el capital es \$40 000.

40. Cierto capital, junto con sus intereses simples, suma, al cabo de 8 meses, \$8 580. Sabiendo que en 26 meses ascendería a \$9 322.50, se pregunta, cuál es el capital impuesto y a qué tanto % se impuso.

41. Una suma de dinero, colocada a interés simple, asciende a \$420 en 3 años, y a \$480 en 7 años. Se desea saber cuál es el capital y el tanto %.

42. Un capital con sus intereses simples en m años, suma \$$a$ y en n años, \$$b$. Expresar el capital y el tanto %.

43. *Una aleación de cobre y estaño pesa* 100 *kg en el aire, y* 87.50 *en el agua. ¿Cuáles son los pesos del cobre y del estaño, dado que los pesos específicos respectivos de dichos metales son* 8.8 *kg y* 7.2 *kg?*

Sean x y y los pesos respectivos del cobre y del estaño. Se tiene por primera ecuación:

$$x + y = 100. \qquad (1)$$

Si se sumergen en el agua 1 dm^3 de estaño y 1 dm^3 de cobre, pierde cada uno un kilo, en virtud del principio de Arquímedes. Teniendo esto en cuenta, para hallar la segunda ecuación, puede razonarse así: en 8.8 kg de cobre pesados en el agua, se pierde un kg; en un kilo sólo se pierde $^1/_{8.8}$ y en los x kg de cobre que entran en la aleación, se perderá $\frac{x}{8.8}$.

Razonando de idéntica manera para el estaño, se halla que los y kg de este metal pierden en el agua $\frac{y}{7.2}$.

Ahora bien, la pérdida habida en los dos metales es:

$$100 - 87.5 = 12.5 \text{ kg}.$$

Por tanto:
$$\frac{x}{8.8} + \frac{y}{7.2} = 12.50. \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema de las ecuaciones (1) y (2), se halla 55 kg de cobre y 45 kg de estaño.

Hay 55 kg de cobre y 45 kg de estaño.

44. Un lingote pesa 300 g y está formado de oro y plata. Si se pesa en el agua, pierde 20 g de su peso. ¿Cuál es su composición sabiendo que el peso específico del oro es de 19.50 kg, y el de la plata, 10.50 kg?

45. *Un automóvil que va de* M *a* N, *sufre un percance en camino: por eso su velocidad queda reducida a un quinto de lo que era antes, y, en consecuencia, llega con* 9 *horas de atraso. Si el accidente hubiera acontecido a* 45 *kilómetros más cerca de* N, *el auto no habría tenido más que* 3 *horas de atraso. Calcúlese la velocidad del automóvil antes del accidente y la distancia del punto de parada hasta* N.

Sean $5x$ y y la velocidad y la distancia pedidas; se tiene:

Velocidad del auto antes del accidente: $5x$.

Velocidad del auto después del accidente: x.

Distancia desde el punto de parada hasta N: y.

Tiempo que habría tardado en recorrerla, sin accidente: $\frac{y}{5x}$.

Tiempo que tardó, debido al accidente: $\frac{y}{x}$.

Si el percance hubiera tenido lugar 45 km más cerca de N, la distancia por recorrer habría sido $y - 45$ km. Luego se puede escribir:

Tiempo empleado en recorrerla, sin accidente: $\frac{y-45}{5x}$.

Tiempo en que la recorrió, debido al accidente: $\frac{y-45}{x}$.

Según el enunciado:
$$\frac{y}{x} = \frac{y}{5x} + 9. \qquad (1)$$

$$\frac{y-45}{x} = \frac{y-45}{5x} + 3. \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema de las ecuaciones (1) y (2), se obtiene:

$$x = 6, \quad y = 67.5.$$

La velocidad del auto, antes del accidente, era de 30 km, y la distancia del punto de parada hasta N es de 67.5 km.

46. Un tren que va de A a B tiene que pararse, por un accidente, durante 45 minutos; luego reanuda su marcha con una velocidad que es los 5 sextos de lo que era antes, y llega por eso a B con 75 minutos de atraso. Si el percance hubiera sucedido a 45 km más cerca de A, el retardo habría sido de 90 minutos. Hállese la velocidad del tren antes del accidente y la distancia del punto de parada hasta B.

47. Mi edad es a la de mi hermano como 7 es a 5; dentro de 9 años serán entre sí como 5 es a 4. Hállense las dos edades.

48. La edad de un joven es tal que la suma de los dos dígitos del número que la expresa es 7. ¿Cuál es ese número, sabiendo que invertido, es igual al doble del primero más 2?

49. Dícele Juan a Pedro: ¿Qué edad tengo, si tengo el doble de la que tú tenías cuando yo tenía la que tú tienes, sabiendo que cuando tú tengas la que yo tengo, entre los dos sumaremos 63 años?

50. Tres viajeros han gastado cierta cantidad en un hotel. La suma del gasto del primero con el del segundo, es \$ 2 más que el del tercero; el primero y el tercero juntos, han gastado \$ 6 más que el segundo; por último, el segundo y el tercero, han gastado, entre los dos, \$ 10 más que el primero. ¿Cuánto gastó cada uno?

51. Un abarrotero puede dar 9 cajas de manzanas y 16 medidas de harina, o bien, 15 cajas de manzanas y 14 medidas de harina por \$ 57. Hállese el precio de la caja de manzanas y el de la medida de harina.

52. Un tendero compró cierto número de peras a \$ 20 la docena, más 10 novenos de este número \$ 16 la docena. Las vendió todas a \$ 22 la docena, y ganó en total \$ 234. ¿Cuántas peras compró de cada clase?

53. En una asamblea se adoptó una resolución por una mayoría de 10 votos; si una cuarta parte de los votos en pro hubiese sido en contra, la moción habría sido desechada por mayoría de 6 votos. ¿Cuántos votos hubo en pro y cuántos en contra?

54. Si un terreno tuviera 6 m más de largo y 5 m más de ancho, tendría 839 m^2 más de superficie; pero, si tuviera 4 m más de largo y 7 m más de ancho, tendría 879 m^2 más. Hállese lo largo y lo ancho.

55. Aumentando lo largo de un campo en 5 m y lo ancho en 7 m, la superficie aumenta en 830 m^2; pero, si se disminuye lo largo en 8 m y lo ancho en 4 m, la superficie disminuye en 700 m^2. Calcúlense las dimensiones.

56. Un equipo de remeros puede navegar 10 millas en 50 minutos, yendo con la corriente, y 12 millas en hora y media, contra corriente. Hállese la velocidad de la corriente, por hora, y la de la embarcación en agua tranquila.

57. Dos aeroplanos parten de un mismo punto y van en direcciones opuestas. La velocidad del uno supera en 60 millas, por hora, la del otro. Al cabo de 5 horas distan de 1 450 millas. Hállese la velocidad de cada aeroplano.

58. Un obrero aceptó trabajar en una hacienda en las siguientes condiciones: por cada día que trabajara, se le darían \$ 5 y los alimentos, y por cada día que dejara de trabajar, se le descontarían \$ 2.50 por sus alimentos. Al cabo de 30 días recibió \$ 105. ¿Cuántos días trabajó y cuántos dejó de trabajar?

59. Una persona colocó parte de \$ 2 400, al 5 %, y lo restante al 2 %. Al cabo de un año, la primera parte le produjo \$ 43 más que la otra. ¿Cuánto colocó en cada caso?

60. Tres socios forman compañía. Las sumas aportadas por cada uno son tales que la parte del primero más la mitad de la del segundo, la parte del segundo más el tercio de la del primero, y la parte del tercero más el cuarto de la del primero, son todas iguales a \$ 50 000. ¿Cuánto aportó cada socio?

5

DESIGUALDADES O INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

I. DEFINICIONES Y PROPIEDADES

253. Definiciones. La expresión $a \neq b$, quiere decir que a no es igual a b. Según los valores particulares de a y de b, puede tenerse $a > b$, que se lee a mayor que b, cuando la diferencia $a - b$ es *positiva*, y $a < b$, que se lee a menor que b, cuando la diferencia $a - b$ es *negativa*.

Desigualdad *es la expresión de dos cantidades tales que la una es mayor o menor que la otra.*

Lo mismo que en las igualdades, en toda desigualdad, los términos que están a la *izquierda* del signo mayor o menor, forman el *primer miembro* de la desigualdad, y los términos de la *derecha*, forman el *segundo miembro*.

254. Consecuencias de la definición. De la definición de desigualdad, lo mismo que de la escala de los números algebraicos, se deducen algunas consecuencias, a saber:

1ª *Todo número positivo es mayor que cero;* v. gr.:

$$7 > 0; \quad \text{porque} \quad 7 - 0 = 7.$$

2ª *Todo número negativo es menor que cero;* v. gr.:

$$-10 < 0; \quad \text{porque} \quad -10 - 0 = -10.$$

3ª *Si dos números son negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto;* v. gr.:

$$-20 > -30; \quad \text{porque} \quad -20 - (-30) = -20 + 30 = 10.$$

255. Sentido de una desigualdad. Los signos $>$ o $<$ determinan *dos sentidos opuestos o contrarios* en las desigualdades, según que el primer miembro sea mayor o menor que el segundo.

Se dice que una desigualdad *cambia de sentido*, cuando el miembro mayor se convierte en menor, o viceversa.

256. Desigualdades absolutas y condicionales. Así como hay igualdades absolutas, que son las *identidades*, e igualdades condicionales, que son las *ecuaciones*; así también hay dos clases de desigualdades: las *absolutas* y las *condicionales*.

Desigualdad absoluta es aquella que se verifica para cualquier valor que se atribuya a las literales que figuran en ella; v. gr.:

$$a^2 + 1 > a.$$

Desigualdad condicional es aquella que sólo se verifica para ciertos valores de las literales; v. gr.:

$$2x - 6 > 0,$$

que solamente se satisface para $x > 3$. En tal caso se dice que 3 es el *límite* de x.

Las desigualdades condicionales se llaman **inecuaciones.**

257. Propiedades de las desigualdades. 1ª *Una desigualdad no cambia de sentido cuando se añade o se resta un mismo número a cada miembro.*

Efectivamente, si en la desigualdad $a > b$ se designa por c lo que falta a b para ser igual a a, se tiene:

$$a = b + c.$$

Añadiendo un mismo número, positivo o negativo, a los dos miembros, se puede escribir:

$$a + m = b + c + m.$$

Suprimiendo c en el segundo miembro, resulta evidentemente:

$$a + m > b + m.$$

EJEMPLOS:

1º $8 > 5$; $8 + 2 > 5 + 2$, o sea, $10 > 7$.

2º $-2 > -4$; $-2 - 3 > -4 - 3$, o sea, $-5 > -7$.

258. Consecuencia de esta propiedad. *Puede suprimirse un término en un miembro de una desigualdad, teniendo cuidado de agregar en el otro miembro el término simétrico del suprimido;* es decir, se puede pasar un término de un miembro a otro, cambiando su signo, porque esto equivale a sumar o restar una misma cantidad a los dos miembros.

EJEMPLO: La inecuación $5x - 2 > 3x + 4$ puede escribirse: $5x - 3x > 4 + 2$.

259. 2ª Propiedad. *Una desigualdad no cambia de sentido cuando se multiplican sus dos miembros por un mismo factor positivo, o se dividen entre un mismo divisor, también positivo.*

Sea la desigualdad $a > b$, es decir, $a = b + c$.

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por un número positivo m, resulta:

$$am = bm + cm.$$

Suprimiendo el término positivo cm, el segundo miembro disminuye, y se tiene:

$$am > bm.$$

Si m es recíproco de un número positivo, queda evidenciada la segunda parte de esta propiedad.

EJEMPLOS:

1º $15 > 7$; $15 \times 3 > 7 \times 3$, es decir, $45 > 21$.

2º $15 > -35$; $15 : 5 > (-35) : 5$, es decir, $3 > -7$.

260. 3ª Propiedad. *Una desigualdad cambia de sentido cuando se multiplican sus dos miembros por un mismo factor negativo, o se dividen entre un mismo divisor, también negativo.*

Sea la desigualdad $a > b$, es decir, $a = b + c$.

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por el factor negativo $-n$, se obtiene:

$$-an = -bn - cn.$$

Suprimiendo $-cn$, el segundo miembro aumenta; por tanto,

$$-an < -bn.$$

Si $-n$ es recíproco de un número negativo, queda demostrada la segunda parte del enunciado.

EJEMPLOS:

1º $3 > -25$; $3 \times (-4) < (-25)(-4)$, o sea, $-12 < 100$.

2º $64 < 100$; $64 : (-4) > 100 : (-4)$, o sea, $-16 > -25$.

261. Consecuencia de la propiedad anterior. *Pueden cambiarse todos los signos de una desigualdad, con tal que se cambie el sentido de la misma;* porque esto equivale a multiplicar sus dos miembros por -1.

EJEMPLO: La inecuación $-8x + 120 < 9 - 5x$
puede escribirse: $8x - 120 > -9 + 5x$.

262. 4ª Propiedad. *Si los dos miembros de una desigualdad son positivos y se elevan a la misma potencia, la desigualdad no cambia de sentido.*

Sea la desigualdad $a < b$, en la que a y b son positivos.

Multiplicando sus dos miembros por b, resulta:

$$ab < b^2.$$

En el primer miembro de esta desigualdad, sustituyendo b por a, la desigualdad se refuerza; por tanto:

$$a^2 < b^2.$$

EJEMPLO: $7 < 9$; $7^3 < 9^3$, es decir, $343 < 729$.

263. 5ª Propiedad. *Si los dos miembros de una desigualdad son negativos y se elevan a una potencia de grado impar, no cambia el sentido de la desigualdad; pero hay cambio de sentido si el grado de la potencia es par.*

Sea la desigualdad $-a < -b$.

a) Multiplicando sus dos miembros por b^2, se obtiene:

$$-ab^2 < -b^3.$$

En el primer miembro, reemplazando b^2 por a^2, la desigualdad se refuerza; luego se puede escribir:

$$-a^3 < -b^3.$$

b) Multiplicando los dos miembros de la primera desigualdad por $-b$, y haciendo análogas transformaciones, la desigualdad cambia de sentido, porque sus términos cambian de signo, y se tiene:

$$a^2 > b^2.$$

EJEMPLOS:

1º $-4 > -6$; $(-4)^3 > (-6)^3$, o sea, $-64 > -216$.

2º $-8 < -5$; $(-8)^2 > (-5)^2$, o sea, $64 > 25$.

264. 6ª Propiedad. *Si se suman miembro a miembro varias desigualdades de mismo sentido, resulta una desigualdad de mismo sentido que aquéllas.*

Sean las desigualdades $a > b$, $a' > b'$, $a'' > b''$

Se puede escribir:
$$a = b + c,$$
$$a' = b' + c',$$
$$a'' = b'' + c''.$$

Sumando miembro a miembro y suprimiendo $c + c' + c''$, se tiene, sucesivamente:

$$a + a' + a'' = b + b' + b'' + c + c' + c'',$$
$$a + a' + a'' > b + b' + b''.$$

EJEMPLO: Dado $3x > 10$ y $9x > 26$,
se obtiene: $12x > 36$.

265. 7ª Propiedad. *Si se restan miembro a miembro dos desigualdades de sentido contrario, resulta una desigualdad de igual sentido que el minuendo.*

Sean las desigualdades $a > b$ y $c < d$.

Invirtiendo la segunda desigualdad y sumándola a la primera, se tiene:

$$\begin{array}{r} a > b \\ d > c \\ \hline a + d > b + c \end{array}$$

Restando $d + c$ de cada miembro, resulta:

$$a - c > b - d.$$

EJEMPLO: Dado $7x < 14$ y $5x > 18$,
se obtiene: $2x < -4$.

II. RESOLUCION DE LAS INECUACIONES

266. Definición y ejemplos. *Resolver una inecuación, es hallar los valores que la verifican.*

Ejemplos: 1º Resolver la inecuación $3x + 5 > 2x - 8$

Inecuación dada:	$3x + 5 >$	$2x - 8$	
Réstese $2x$ de cada miembro:	$-2x$	$= -2x$	
	$x + 5 >$	-8	
Réstese 5 de cada miembro:	$-5 =$	-5	
	$x >$	$-13.$	

Por tanto, todo valor de x mayor que -13 verifica la inecuación.

2º Resolver la inecuación $\frac{8+x}{3} < \frac{5x-10}{5}$.

Multiplíquese por 15 cada m.:	$40 + 5x <$	$15x - 30$	
Réstese $15x$ de cada miembro:	$-15x =$	$-15x$	
	$40 - 10x <$	-30	
Réstese 40 de cada miembro:	-40	$=$	-40
	$-10x <$	-70	
Divídase entre -10 cada m.:	$x > 7.$		

Por tanto, todo valor de x superior a 7 satisface la inecuación propuesta.

3º Probar que si $x \neq 1$, **se tiene** $x^2 + 1 > 2x$.

La desigualdad $(x-1)^2 > 0$ **es cierta, puesto que un cuadrado es siempre positivo; se requiere** $x \neq 1$, pues si $x = 1$, $(x-1)^2$ es cero; por tanto:

$$x^2 - 2x + 1 > 0$$
$$x^2 + 1 > 2x.$$

267. Inecuaciones simultáneas. ***Inecuaciones simultáneas son aquellas que se satisfacen para los mismos valores de la variable.***

Ejemplo: ¿Para qué valores de x se verifican simultáneamente las inecuaciones $8x - 16 < 0$ y $5x > 3$?

La primera se satisface para $x < 2$, y la segunda, para $x > \frac{3}{5}$; por consiguiente, los valores de x comprendidos entre $\frac{3}{5}$ y 2, es decir, mayores que $\frac{3}{5}$ y menores que 2, verifican simultáneamente ambas inecuaciones.

Este resultado se escribe así: $\frac{3}{5} < x < 2$.

Esquemáticamente podría representarse como lo indica la figura 45.

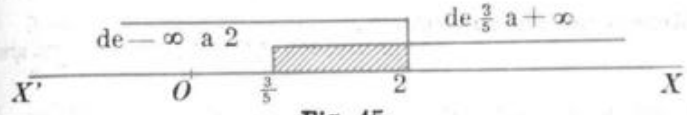


Fig. 45.

Los valores de x comprendidos en la parte sombreada, satisfacen simultáneamente el sistema de inecuaciones.

268. Ecuaciones e inecuaciones combinadas. Ejemplo: Hallar los límites de x y de y en el sistema

$$4x + 9y < 40, \quad (1)$$
$$6x - y = 2. \quad (2)$$

Multiplicando (1) por 3:	$12x + 27y < 120$	
Multiplicando (2) por 2:	$12x - 2y = 4$	
Restando miembro a miembro:	$29y < 116$	
Dividiendo entre 29 cada m.:	$y < 4$	
Multiplicando (2) por 9:	$54x - 9y = 18$	(3)
Sumando (3) con (1):	$58x < 58$	
Dividiendo entre 58 cada m.:	$x < 1.$	

Si x y y son respectivamente menores que 1 y 4, la desigualdad (1) se verifica; y, cuando alcancen dichos valores, se verifica la igualdad (2).

EJERCICIO 50

Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $\frac{3x}{7} < 1.$
2. $x + 5 > 3 - 3x.$
3. $\frac{3}{2} + 5x > 7x + 4.$
4. $(x+2)^2 > x^2 - 5x + 4.$
5. $\frac{x}{5} > \frac{42}{3} + \frac{x}{2}.$
6. $\frac{x+60}{60} > \frac{x}{5}.$
7. $a - bx > cx - d.$
8. $\frac{a+bx}{c^2} > x.$

9. $(4-x)^2+3x^2<5+(2x-1)^2$.

10. $(ax+b)^2<ax(ax-d)$.

11. $(x^2-a^2)x<(x+b)(x^2+c)-bx^2$.

Hallar los valores de x que satisfacen simultáneamente los sistemas de inecuaciones siguientes:

12. $5x+\frac{5}{7}>4x+7$, $4x+\frac{2}{3}<2x+25$.

13. $15x-\frac{1}{3}>2(x+1)$, $4(x-4)<3x-14$.

14. $8x-5>\frac{15x-8}{2}$, $2x-3>\frac{20x-3}{8}$.

15. $5x+6>2x-8$, $4x-3<3x+5$.

16. Probar que si a y b son positivos y desiguales, se tiene:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2. \qquad \text{¿Es } (a-b)^2>0\text{?}$$

17. Probar que la desigualdad $4m^2+25>20m$ se verifica para todo valor de m no igual a $\frac{5}{2}$.

18. Demostrar que $\frac{m}{2n}+\frac{2n}{m}>2$, si n no es igual a $\frac{m}{2}$.

19. Demostrar que $4x^2+6.25>10x$, si $x\neq\frac{5}{4}$.

Hallar los límites de x y de y en los sistemas siguientes:

20. $3x+2y>37$, $2x+3y=33$.

21. $7x+2y>25$, $3x+5y=19$.

TERCERA PARTE

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1

POTENCIAS Y RAICES

I. DEFINICIONES Y PROPIEDADES

269. Potencia de un número. *Llámase* **potencia** *de un número el producto (efectuado o indicado) de varios factores iguales a dicho número.*

Así, a^2, a^3, a^4, ... a^n, son potencias del número a.

270. Cuadrado. Si el lado de un cuadrado es 25 m, el área es:

$$25\times 25=25^2=625\ \text{m}^2.$$

Cuadrado de un número es el producto de dos factores iguales a dicho número.

271. Cuadrado de un monomio. Sea $(a^3)^2$ y $(3a^2b^3c)^2$.

Según lo expuesto en el Nº 72,

$(a^3)^2=a^3\times a^3=a^{3+3}=a^{3\times 2}=a^6$.

$(3a^2b^3c)^2=(3a^2b^3c)(3a^2b^3c)=3^2\times(a^2)^2\times(b^3)^2\times c^2=9a^4b^6c^2$.

Para obtener el cuadrado de un monomio, elévese el coeficiente al cuadrado y duplíquese el exponente de cada literal.

El monomio que resulte será un cuadrado perfecto, es decir, un monomio cuyo coeficiente es el cuadrado de un número.

272. Cuadrado de un quebrado. Por definición, se tiene:

$$\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2 = \frac{a^2}{b^3} \times \frac{a^2}{b^3} = \frac{a^2 \times a^2}{b^3 \times b^3} = \frac{a^4}{b^6}.$$

Para elevar un quebrado al cuadrado, elévese a esa potencia cada uno de sus términos.

273. Cubo. Si la arista de un cubo es de 5 dm, el volumen es:

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125 \text{ dm}^3.$$

Cubo de un número es el producto de tres factores iguales a dicho número.

274. Cubo de un monomio. Sea $(a^4)^3$ y $(-2a^3bc^5)^3$.

Según lo expuesto en el Nº 72,

$$(a^4)^3 = a^4 \times a^4 \times a^4 = a^{4+4+4} = a^{4\times 3} = a^{12}.$$

$$(-2a^3bc^5)^3 = (-2a^3bc^5)(-2a^3bc^5)(-2a^3bc^5)$$
$$= (-2)^3 \times (a^3)^3 \times b^3 \times (c^5)^3 = -8a^9b^3c^{15}.$$

Luego: *Para obtener el cubo de un monomio, elévese su coeficiente al cubo, y tripliquese el exponente de cada literal.*

275. Cubo de un quebrado. Por definición, se tiene:

$$\left(\frac{m^4}{n^3}\right)^3 = \frac{m^4}{n^3} \times \frac{m^4}{n^3} \times \frac{m^4}{n^3} = \frac{m^4 \times m^4 \times m^4}{n^3 \times n^3 \times n^3} = \frac{m^{12}}{n^9}.$$

Por tanto: *Para elevar un quebrado al cubo, elévese al cubo cada uno de sus términos.*

276. Potencia emésima. *Potencia emésima de un número es el producto de* m *factores iguales a dicho número.*

La potencia emésima de un monomio se obtiene elevando cada factor a dicha potencia.

La potencia emésima de un quebrado se puede obtener elevando cada término del quebrado a dicha potencia.

277. Raíz de un número. *Llámase* **raíz** *de un número algebraico otro número del cual el primero es una potencia.*

La raíz se indica por medio del signo $\sqrt{}$, llamado *radical*, antepuesto a la expresión cuya raíz quiere extraerse.

La cantidad afectada por el radical se llama *radicando* o *subradical*.

El numerito colocado en el ángulo del radical se llama *índice*, e indica el orden de la raíz.

Cuando un radical no tiene ningún índice explícito, se subentiende el 2.

Así, $\sqrt{a}$ indica raíz segunda, o raíz cuadrada de a;

$\sqrt[3]{a}$ indica raíz tercera, o raíz cúbica de a;

$\sqrt[5]{a}$ indica raíz quinta de a;

$\sqrt[m]{a}$ indica raíz emésima de a.

La raíz de orden m de una expresión algebraica, $a^2 - b^2 + c^2$, por ej., se puede indicar de una de las dos maneras siguientes:

$$\sqrt[m]{a^2 - b^2 + c^2} \quad \text{o} \quad \sqrt[m]{(a^2 - b^2 + c^2)}.$$

278. Raíz cuadrada. Raíz cúbica. Raíz emésima. **Si el área de un cuadrado es de 625 m², su** lado mide **25 m; 25 es la raíz cuadrada de 625.**

Raíz cuadrada de un número es cada uno de sus dos factores iguales, **es decir, otro número cuyo cuadrado es igual a dicho número.**

Si el volumen de un cubo es de 125 dm³, la arista es de 5 dm; 5 es la raíz cúbica de 125.

Raíz cúbica de un número algebraico es cada uno de sus tres factores iguales.

Raíz emésima de un número algebraico es cada uno de sus **m** ***factores iguales.***

Notas. **1ª** De las definiciones que preceden, se deduce que extraer una raíz es una operación inversa a la de elevar a una potencia.

Por tanto: $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt[3]{2^3} = 2$, etc.

2ª Todo número tiene tantas raíces como unidades hay en el índice.

II. RAIZ CUADRADA

279. **Raíz cuadrada de un monomio cuadrado perfecto.** Sea extraer la raíz cuadrada de a^6 y de $9a^4b^6c^2$.

Según se ha visto anteriormente:

$$(a^3)^2 = a^{3\times 2} = a^6.$$
$$(3a^2b^3c)^2 = 3^2 \times a^{2\times 2} \times b^{3\times 2} \times c^2 = 9a^4b^6c^2.$$

Debe tenerse inversamente:

$$\sqrt{a^6} = a^{6:2} = a^3.$$
$$\sqrt{9a^4b^6c^2} = 3^{2:2} \times a^{4:2} \times b^{6:2} \times c^{2:2} = 3a^2b^3c.$$

Luego: *Para extraer la raíz cuadrada de un monomio cuadrado perfecto, extráigase la raíz cuadrada del coeficiente y divídase entre 2 el exponente de cada literal.*

280. **Raíz cuadrada de un quebrado.** Análogamente, de

$$\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2 = \frac{a^{2\times 2}}{b^{3\times 2}} = \frac{a^4}{b^6},$$

se deduce, procediendo a la inversa:

$$\sqrt{\frac{a^4}{b^6}} = \frac{a^{4:2}}{b^{6:2}} = \frac{a^2}{b^3}.$$

De donde: *Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado, basta extraer la de cada uno de sus términos.*

281. **Signo de la raíz cuadrada de un monomio.** Puesto que

$$(+8)^2 = 64, \quad (-8)^2 = 64,$$
$$(+2a)^2 = 4a^2, \quad (-2a)^2 = 4a^2,$$

se obtiene, inversamente:

$$\sqrt{64} = +8, \quad \sqrt{64} = -8,$$
$$\sqrt{4a^2} = +2a, \quad \sqrt{4a^2} = -2a.$$

Por tanto: *Todo monomio tiene dos raíces cuadradas numéricamente iguales, pero de signos contrarios, es decir, las raíces cuadradas son dos números simétricos.*

La raíz positiva (de coeficiente positivo) se llama *raíz principal;* es la *raíz aritmética* del monomio.

Las dos raíces cuadradas se combinan del modo siguiente:

$$\sqrt{64} = \pm 8; \quad \sqrt{a^4} = \pm a^2.$$

282. **Raíz cuadrada de un polinomio.** El procedimiento empleado para formar los términos del cuadrado de un polinomio (Nº 91), sugiere cómo debe procederse para extraer la raíz cuadrada de un polinomio dado.

Sea el trinomio cuadrado perfecto

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2.$$

De la igualdad anterior se deduce que: Para extraer la raíz cuadrada del trinomio propuesto, se extrae primero la de su primer término, lo cual da $2x$.

El segundo término del polinomio, $12xy$, es el doble producto del primer término de la raíz por el segundo; por tanto, para obtener el segundo, bastará dividir $12xy$ entre $4x$, lo cual da $3y$.

Nótese que el trinomio propuesto puede escribirse $4x^2 + 3y(4x + 3y)$, en que el factor $4x + 3y$ es el duplo del primer término de la raíz, más el cociente del segundo término del trinomio entre dicho duplo del primer término de la raíz.

283. **Ejemplos.** 1º Extraer la raíz cuadrada del polinomio

$$9x^4 - 12x^3 + 28x^2 - 16x + 16.$$

Pueden disponerse las operaciones en la forma siguiente:

Radicando	$9x^4 - 12x^3 + 28x^2 - 16x + 16$	$3x^2 - 2x + 4$	raíz
$-(3x^2)^2$	$-9x^4$		
Primer residuo	$-12x^3 + 28x^2 - 16x + 16$	$6x^2$	1er divisor
$-(6x^2 - 2x)(-2x)$	$+12x^3 - 4x^2$	$6x^2 - 2x$	
Segundo residuo	$+24x^2 - 16x + 16$	$6x^2 - 4x$	2º divisor
$-(6x^2 - 4x + 4)4$	$-24x^2 + 16x - 16$	$6x^2 - 4x + 4$	
	0		

EXPLICACIÓN: El primer término de la raíz es $3x^2$, cuyo cuadrado, $9x^4$, se resta del cuadrado dado.

Se duplica la raíz, y se escribe el resultado debajo de ella.

El segundo término de la raíz se obtiene dividiendo el primer término del primer residuo entre el doble de la raíz, y se obtiene $-2x$,

que se escribe a la derecha del doble de la raíz. De esta manera se tiene $6x^3 - 2x$ que, multiplicado por $(-2x)$, da $-12x^3 + 4x^2$.

Se resta este producto del 1er residuo, y se obtiene $24x^2 - 16x + 16$ como segundo residuo.

Se duplica la raíz $(3x^2 - 2x)$, y se tiene $6x^2 - 4x$.

El tercer término de la raíz se obtiene dividiendo el primer término del segundo residuo entre el doble del primer término de la raíz, y se obtiene 4, que se escribe a la derecha del doble de la raíz, y se tiene $6x^2 - 4x + 4$ que, multiplicado por 4, da $24x^2 - 16x + 16$.

Se resta este producto del segundo residuo, y queda cero.

La raíz cuadrada es exacta.

2º Extraer la raíz cuadrada del polinomio

$$25x^4 - 20x^3 + 34x^2 - 12x + 9.$$

Procediendo como en el caso anterior, se obtiene:

Radicando	$25x^4 - 20x^3 + 34x^2 - 12x + 9$	$5x^2 - 2x + 3$	raíz
$-(5x^2)^2$	$-25x^4$		
Primer residuo	$-20x^3 + 34x^2 - 12x + 9$	$10x^2$	1er divisor
$-(10x^2 - 2x)(-2x)$	$+20x^3 - 4x^2$	$10x^2 - 2x$	
Segundo residuo	$+30x^2 - 12x + 9$	$10x^2 - 4x$	2º divisor
$-(10x^2 - 4x + 3)3$	$-30x^2 + 12x - 9$	$10x^2 - 4x + 3$	
	0		

284. Regla.

Para extraer la raíz cuadrada de un polinomio:

1º *Ordénese el polinomio dado según las potencias ascendentes o descendentes de una misma literal.*

2º *Hállese la raíz cuadrada del primer término, y escríbase como primer término de la raíz.*

3º *Réstese del polinomio dado el cuadrado de este primer término de la raíz.*

4º *Divídase el primer término del residuo entre el duplo del primer término de la raíz, y escríbase el cociente como segundo término de la raíz.*

5º *Añádase este segundo término de la raíz al duplo del primer término de la misma; multiplíquese esta suma por el segundo término obtenido, y réstese este producto del primer residuo, con lo cual se obtiene el segundo residuo.*

6º *Duplíquense los dos primeros términos de la raíz; luego divídase el primer término del segundo residuo entre el duplo del primer término de la raíz, y continúese así hasta que se hayan obtenido todos los términos de la raíz.*

285. Observaciones. 1ª Si en los ejemplos anteriores, se hubieran tomado las segundas raíces, simétricas de las primeras, los resultados habrían sido, respectivamente:

$$-3x^2 + 2x - 4 \quad \text{y} \quad -5x^2 + 2x - 3.$$

Combinando en una sola respuesta las dos raíces, se tiene:

$$\sqrt{9x^4 - 12x^3 + 28x^2 - 16x + 16} = \pm(3x^2 - 2x + 4).$$

$$\sqrt{25x^4 - 20x^3 + 34x^2 - 12x + 9} = \pm(5x^2 - 2x + 3).$$

2ª Existe la propensión a escribir:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b, \quad \sqrt{c^2 - d^2} = c - d.$$

Ahora bien, esto no puede ser, porque un binomio nunca es cuadrado perfecto; efectivamente, el cuadrado de un monomio es otro monomio, y el de un binomio es un trinomio.

Además, para darse mejor cuenta de ello, véanse los dos ejemplos numéricos siguientes:

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5, \quad \text{y} \quad 5 \neq 4 + 3.$$

$$\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5, \quad \text{y} \quad 5 \neq 13 - 12.$$

Nota. — Las operaciones de la extracción de raíces podrían disponerse también del modo siguiente:

	$3x^2 - 2x + 4$
	$9x^4 - 12x^3 + 28x^2 - 16x + 16$
	$-9x^4$
$6x^2$	$-12x^3 + 28x^2 - 16x + 16$
	$+12x^3 - 4x^2$
$6x^2 - 4x$	$+24x^2 - 16x + 16$
	$-24x^2 + 16x - 16$
	0

EJERCICIO 51

Elevar a la potencia indicada.

1. $(-a^2b^3)^2$.
2. $(3a^2b^3c^5)^3$.
3. $(4a^3b^4c^5d)^2$.
4. $(5ax^3)^3$.
5. $(7a^3bc^2d^3)^3$.
6. $(8a^5b^2m^3n)^2$.
7. $(2x+1)^3$.
8. $(3x-2)^3$.
9. $(3x+2y)^3$.
10. $\left(3x+\frac{m}{3}\right)^3$.
11. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$.
12. $\left(2x+\frac{3}{x}\right)^3$.
13. $(2a+b-3c)^2$.
14. $(5m+2n+s)^2$.
15. $(2m-n+3r-2s)^2$.

Efectuar las operaciones indicadas.

16. $\sqrt{1}$.
17. $\sqrt{121}$.
18. $\sqrt{144}$.
19. $-\sqrt{400}$.
20. $\sqrt{1\,600}$.
21. $-\sqrt{2\,500}$.
22. $\sqrt{5^{12}}$.
23. $\sqrt{25^4}$.
24. $\sqrt{40^6}$.
25. $\sqrt{49a^6b^8}$.
26. $\sqrt{16a^8m^{20}}$.
27. $\sqrt{64x^{18}n^{16}z^{14}}$.
28. $\sqrt{(a+b-c)^4}$.
29. $\sqrt{(x+2y+3z)^{8n}}$.
30. $\sqrt{(2m+5n-2r)^{4x}}$.
31. $\sqrt{\frac{25a^4b^2}{49m^6n^2}}$.
32. $\sqrt{\frac{81m^6d^8}{144n^2r^4}}$.
33. $\sqrt{\frac{25x^2y^6}{169m^4s^6}}$.
34. $\sqrt{x^2-4x+4}$.
35. $\sqrt{16x^2-40xy+25y^2}$.
36. $\sqrt{64a^2b^2+48abc+9c^2}$.

Extraer la raíz cuadrada de los polinomios.

37. $4x^4+4x^3+5x^2+2x+1$.
38. $1-6a+11a^2-6a^3+a^4$.
39. $9x^4-24x^3+4x^2+16x+4$.
40. $20x^2-70x+4x^4+49-3x^3$.
41. $49m^4-14m^3n-5m^2n^2+8mn^3+16n^4$.

42. $16m^4+8m^3x^2-23m^2x^4-6mx^5+9x^6$.
43. $x^3-xy-\frac{11y^2}{4}+\frac{3y^3}{2x}+\frac{9y^4}{4x^2}$.
44. $\frac{16}{9}+\frac{8x}{3a}-\frac{13x^2}{3a^2}-\frac{4x^3}{a^3}+\frac{4x^4}{a^4}$.

45. Hallar dos números enteros consecutivos cuyos cuadrados tengan por diferencia 675.

46. Hallar dos números enteros cuya diferencia sea 15 y cuyos cuadrados tengan 525 por diferencia.

47. Si a cada lado de un cuadrado se le quitan 8 m, el área disminuye en 336 m². Calcúlese el lado.

48. Si a cada lado de un cuadrado se le añaden 5 m, el área queda aumentada en 265 m². Calcúlese el lado.

49. Calcúlese el lado de un cuadrado tal que si su base aumenta en 2 m y la altura disminuye en 3 m, el área del rectángulo resultante mide 44 m² menos que la del cuadrado dado.

50. Calcúlese el lado de un cuadrado equivalente a un rectángulo cuya base excede a la altura en 21 m, y tiene 150 m de perímetro.

51. Un terreno rectangular de 150 m de perímetro y 1 400 m² de superficie está cercado con un alambrado. Con otro alambrado de igual largo se limita un terreno cuadrado. ¿En cuánto sobrepasa el área de ese cuadrado a la del rectángulo?

III. RAIZ CUBICA Y RAIZ EMESIMA

286. Raíz cúbica de un monomio cubo perfecto. Sea extraer la raíz cúbica de a^{12} y de $-8a^9b^3c^{15}$.

Según se ha explicado ya:

$(a^4)^3 = a^{4\times3} = a^{12}$.

$(-2a^3bc^5)^3 = (-2)^3 \times a^{3\times3} \times b^3 \times c^{5\times3} = -8a^9b^3c^{15}$.

Debe tenerse inversamente:

$\sqrt[3]{a^{12}} = a^{12:3} = a^4$.

$\sqrt[3]{-8a^9b^3c^{15}} = -2^{3:3} \times a^{9:3} \times b^{3:3} \times c^{15:3} = -2a^3bc^5$.

Para extraer la raíz cúbica de un monomio cubo perfecto, extráigase la raíz cúbica del coeficiente y divídase entre 3 el exponente de cada literal.

287. **Raíz cúbica de un quebrado.** Análogamente, de

$$\left(\frac{m^4}{n^3}\right)^3 = \frac{m^{4\times 3}}{n^{3\times 3}} = \frac{m^{12}}{n^9},$$

se deduce, procediendo a la inversa:

$$\sqrt[3]{\frac{m^{12}}{n^9}} = \frac{m^{12:3}}{n^{9:3}} = \frac{m^4}{n^3}.$$

Por tanto: *Para extraer la raíz cúbica de un quebrado, basta extraer la de cada uno de sus términos.*

288. **Signo de la raíz cúbica de un monomio.** La raíz cúbica *aritmética* o *principal* de un monomio tiene el mismo signo que dicho monomio.

Así, se tiene:

$$\sqrt[3]{27} = 3, \quad \sqrt[3]{-8} = -2;$$
$$\sqrt[3]{a^{21}} = a^7, \quad \sqrt[3]{-64m^6} = -4m^2.$$

289. **Raíz emésima de un monomio.** Sea extraer la raíz quinta de a^{15} y la raíz séptima de $128a^{14}b^7c^{21}$.

Según lo expuesto anteriormente:

$$(a^3)^5 = a^{3\times 5} = a^{15}.$$
$$(2a^2bc^3)^7 = 2^7 \times a^{2\times 7} \times b^7 \times c^{3\times 7} = 128a^{14}b^7c^{21}.$$

Por tanto, se tendrá inversamente:

$$\sqrt[5]{a^{15}} = a^{15:5} = a^3.$$

$$\sqrt[7]{128a^{14}b^7c^{21}} = 2^{7:7} \times a^{14:7} \times b^{7:7} \times c^{21:7} = 2a^2bc^3.$$

Para extraer la raíz emésima de un monomio, extráigase la raíz emésima del coeficiente y divídase el exponente de cada literal entre m.

290. **Raíz emésima de un quebrado.** Análogamente, de

$$\left(\frac{m^2}{n^3}\right)^6 = \frac{m^{2\times 6}}{n^{3\times 6}} = \frac{m^{12}}{n^{18}},$$

se deduce, procediendo a la inversa:

$$\sqrt[6]{\frac{m^{12}}{n^{18}}} = \frac{m^{12:6}}{n^{18:6}} = \frac{m^2}{n^3}.$$

De donde: *Para extraer la raíz emésima de un quebrado, basta extraer la de cada uno de sus términos.*

291. **Signo de la raíz emésima de un monomio.** 1º El coeficiente de la raíz aritmética de orden cualquiera m de un monomio de coeficiente positivo, es positivo.

Así, $$\sqrt[5]{32a^5b^{15}} = 2ab^3.$$

2º El coeficiente de la raíz aritmética de orden m de un monomio de coeficiente negativo, es negativo si m es impar.

Así, $$\sqrt[5]{-32m^{15}n^5} = -2m^3n.$$

3º Si el coeficiente del monomio es negativo y m es par, el coeficiente de la raíz es imaginario. Ver el número 296.

Así, $$\sqrt{-9a^4b^2c^6} = \sqrt{-9}\, a^2bc^3.$$

IV. DIVERSAS CLASES DE NUMEROS

292. **Observación.** Se da a continuación la nomenclatura a que debe acostumbrarse el alumno para designar ciertas clases de números que encontrará en algunos de los capítulos siguientes:

293. **Número imaginario.** Si se considera la ecuación

$$x^2 + 16 = 0,$$

puede escribirse: $$x^2 = -16,$$

de donde: $$x = \sqrt{-16}.$$

Como no hay número positivo o negativo cuyo cuadrado sea -16, ya que un cuadrado es siempre positivo, $\sqrt{-16}$ no es ni $+4$ ni -4.

Efectivamente: $(+4)^2 = (-4)^2 = 16$, y no -16.

La expresión $\sqrt{-16}$ se llama **número imaginario.**

Análogamente, $\sqrt[4]{-16}$ es imaginaria, porque no existe número algebraico cuya cuarta potencia sea -16; no es ni $+2$ ni -2, porque $(+2)^4 = (-2)^4 = 16$.

Número imaginario es toda raíz de índice par de un número negativo.

294. Unidad imaginaria. Cada una de las raíces cuadradas de -1 es, numéricamente, $\sqrt{-1}$.

La expresión $\sqrt{-1}$ es la unidad de un nuevo sistema de números, llamados imaginarios, como 1 es la unidad de los números que, en contraposición de los imaginarios, se llaman *números reales.*

Se ha convenido en representar por i la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$, o sea:

$$\sqrt{-1} = i.$$

295. Potencias sucesivas de i. Son las siguientes:

$$i = \sqrt{-1};$$
$$i^2 = -1;$$
$$i^3 = i^2 \times i = -i = -\sqrt{-1};$$
$$i^4 = i^2 \times i^2 = 1;$$
$$i^5 = i^4 \times i = i = \sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

Según esto, expresiones como $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-16}$, etc., se escriben $\pm 3i$, $\pm 4i$, etc., porque

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9(-1)} = \sqrt{9i^2} = \pm 3i,$$
$$\sqrt{-16} = \sqrt{16(-1)} = \sqrt{16i^2} = \pm 4i.$$

296. Otra definición de número imaginario. *Número imaginario es el producto de un número positivo o negativo cualquiera por la unidad imaginaria.*

Así, $3i$, $-4i$, ai, $-bi$ son números imaginarios.

297. Número real. ***Todo número no afectado por la unidad imaginaria, se llama número real.***

Así, 7, $-8a$, $3ax$, $5\sqrt{2}$ son números reales.

298. Radical racional. *Una expresión radical es racional si la raíz puede expresarse con números enteros.*

Así, $\sqrt{16}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt{\frac{25}{49}}$ son expresiones racionales, porque son iguales, respectivamente, a ± 4, 3, ± 2 y $\pm \frac{5}{7}$.

299. Radical irracional. *Una expresión radical es irracional si la raíz indicada no puede expresarse con números enteros.*

Así, $\sqrt{2}$ es irracional, porque es imposible obtener un número, por más cifras decimales que tenga, que elevado al cuadrado reproduzca el número 2.

Cuando se dice que $\sqrt{2} = 1.41421$, sólo se indica una aproximación, que depende, evidentemente, del número de decimales; es decir, 1.41421^2 se aproxima más a 2 que 1.414^2.

Las expresiones radicales $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[4]{15}$ son irracionales.

300. Número complejo. *Llámase número complejo la suma algebraica de un número real cualquiera con un número imaginario.*

Así, $3 + 2i$, $a - bi$, $-5 + 3i$, $-p - qi$, etc., son números complejos.

Un complejo que no tiene parte real se llama *imaginario puro.*

V. EXPONENTES FRACCIONARIOS

301. Definición. En toda extracción de raíz de monomio, debe dividirse el exponente de cada literal entre el índice de la raíz.

Se puede notar cómo, en los ejemplos de extracción de raíces cuadrada, cúbica y emésima, anteriormente propuestos, los exponentes de las literales son divisibles entre el índice de la raíz.

Si el cociente no es un número entero, sólo se indica la división, y resulta un exponente fraccionario.

Así, $\sqrt{16a^3b} = \pm 4a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{25a^4b^7} = 5^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{7}{3}}$.

Inversamente: $a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2}$; $5^{\frac{1}{3}}m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{5m^2n^5}$.

Y en general: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

De todo esto se infiere que: *El numerador de un exponente fraccionario indica una elevación a potencia y el denominador indica una extracción de raíz del número afectado por dicho exponente fraccionario.*

Nota. — Según se ha visto (Nº 9), un exponente indica el producto de tantos factores iguales a la base como unidades tiene dicho exponente. ¿Tiene un significado análogo un exponente fraccionario?

Considérese la expresión $a^{\frac{2}{3}}$.

Conforme se acaba de exponer, $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$;

por otra parte, $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a \times a} = \sqrt[3]{a^2}$, (1)

puesto que elevando al cubo los dos últimos miembros de (1) se obtienen resultados iguales, o sea:

$$a^2 = a^2.$$

Se tiene, por tanto, sucesivamente:

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}}.$$

Esto evidencia que $a^{\frac{2}{3}}$ indica el producto de dos factores iguales a $a^{\frac{1}{3}}$.

En general: $a^{\frac{n}{m}}$ indica el producto de n factores iguales a $a^{\frac{1}{m}}$, es decir, un exponente fraccionario tiene un significado análogo al de un exponente entero.

302. Los exponentes fraccionarios en el cálculo. Se aplican a los *exponentes fraccionarios* todas las reglas del cálculo algebraico que se han dado para los exponentes enteros.

303. Aplicaciones. Efectuar las operaciones siguientes:

1º Multiplicar $a^{\frac{3}{2}}$ por $a^{\frac{2}{5}}$.

El producto es: $a^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{3}{2}+\frac{2}{5}} = a^{\frac{15+4}{10}} = a^{\frac{19}{10}}$.

2º Dividir $m^{\frac{4}{3}}$ entre $m^{\frac{1}{7}}$.

El cociente es: $m^{\frac{4}{3}} : m^{\frac{1}{7}} = m^{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}} = m^{\frac{28-3}{21}} = m^{\frac{25}{21}}$.

3º Elevar $n^{\frac{5}{4}}$ a la tercera potencia.

La potencia es: $\left(n^{\frac{5}{4}}\right)^3 = n^{\frac{5}{4}} \times n^{\frac{5}{4}} \times n^{\frac{5}{4}} = n^{\frac{5}{4}\times 3} = n^{\frac{15}{4}}$.

4º Extraer la raíz cúbica de $m^{\frac{1}{2}}$.

La raíz es: $\sqrt[3]{m^{\frac{1}{2}}} = m^{\frac{1}{2}:3} = m^{\frac{1}{6}}$.

EJERCICIO 52

Extraer la raíz real de las expresiones siguientes:

1. $\sqrt[3]{1}$.
2. $\sqrt[3]{-1}$.
3. $\sqrt[3]{-27}$.
4. $\sqrt[3]{64a^{12}}$.
5. $\sqrt[3]{125a^{15}m^{18}}$.
6. $\sqrt[3]{-8a^9c^{12}}$.
7. $\sqrt[4]{16m^8n^{20}}$.
8. $\sqrt[5]{32a^{10}x^{15}}$.
9. $\sqrt[4]{81x^8y^{12}}$.
10. $\sqrt[6]{64m^{12}n^{18}}$.
11. $\sqrt[8]{2^{16}x^{24}n^{16}}$.
12. $\sqrt[10]{3^{20}x^{30}y^{20}}$.
13. $\sqrt[7]{2^7x^{14}m^{28}}$.
14. $\sqrt[3]{\frac{27m^6}{64n^9}}$.
15. $\sqrt[3]{\frac{125x^{12}}{27y^6}}$.
16. $\sqrt[8]{\frac{5^8(x+y-4)^{16}}{3^{16}(m-n+5)^{24}}}$.

Hállese el valor de las cantidades siguientes:

17. x^0.
18. $16^{\frac{1}{2}}$.
19. $49^{\frac{1}{2}}$.
20. $8^{\frac{1}{3}}$.
21. $-27^{\frac{1}{3}}$.
22. $64^{\frac{1}{3}}$.
23. $8^{\frac{2}{3}}$.
24. $16^{\frac{1}{4}}$.
25. $.09^{\frac{1}{2}}$.
26. $36^{\frac{3}{2}}$.
27. $\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$.
28. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$.

En las expresiones siguientes, úsense radicales en vez de exponentes fraccionarios.

29. $x^{\frac{1}{2}}$.
30. $z^{\frac{1}{3}}$.
31. $m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{3}{2}}$.
32. $a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{5}{4}}$.
33. $2x^{\frac{7}{4}}$.
34. $3x^2y^{\frac{1}{2}}$.
35. $2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$.
36. $3a^2b^{\frac{2}{5}}$.

Usense exponentes fraccionarios en lugar de radicales.

37. $\sqrt{x^3}$.
38. $\sqrt[3]{m^4}$.
39. $\sqrt{3x^5}$.
40. $\sqrt[4]{7m^3}$.
41. $\sqrt[3]{2mn^2}$.
42. $\sqrt[5]{7x^3y^2}$.
43. $7\sqrt{a^3m}$.
44. $9\sqrt[3]{x^7y^4}$.

En las expresiones siguientes, úsense solamente exponentes positivos:

45. $2x^{-2}b^{-3}$.

46. $x^{3}y^{-1}z^{-2}$.

47. $\dfrac{x^{3}}{3y^{-1}}$.

48. $\dfrac{(2m)^{-3}b^{2}}{cd^{-2}}$.

49. $\dfrac{x^{2}y^{-2}z^{-3}}{a^{-2}bc^{-1}}$.

50. $\dfrac{a^{-3}b^{2}c^{-2}}{x^{-1}y^{-3}}$.

51. $\dfrac{ax^{-5}b^{-2}}{z^{-2}}$.

52. $\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{2}{3}}}$.

53. $\dfrac{x^{-\frac{2}{3}}}{y^{-\frac{2}{3}}}$.

54. $\dfrac{3z^{-\frac{4}{5}}}{a^{-\frac{3}{4}}}$.

Efectuar las operaciones indicadas a continuación:

55. $m^{\frac{1}{3}} \times m^{\frac{5}{6}}$.

56. $3n^{\frac{7}{2}} \times n^{-\frac{5}{2}}$.

57. $2x \times 3x^{-\frac{11}{8}}$.

58. $3a^{\frac{1}{2}} \times 2a^{-\frac{1}{3}}$.

59. $x^{\frac{3}{4}} \times x^{-\frac{1}{4}}$.

60. $x^{\frac{1}{2}} \times x \times x^{\frac{1}{3}}$.

61. $m^{-\frac{2}{3}} \times m^{0} \times m^{\frac{4}{5}}$.

62. $a^{\frac{1}{5}} \times a^{\frac{3}{10}} \times a^{-\frac{7}{15}}$.

63. $m^{-6}y^{\frac{4}{7}} \times 4m^{7}y^{-2}$.

64. $a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{2}{5}}$.

65. $m^{\frac{3}{4}} : m^{-\frac{1}{3}}$.

66. $x^{-2} : x^{-\frac{1}{3}}$.

67. $x^{n+1} : x^{\frac{1}{2}}$.

68. $x^{n-1} : x^{-\frac{2}{3}}$.

69. $3x^{4} : \left(-5x^{\frac{1}{5}}\right)$.

70. $n^{2} : \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^{2}}}$.

71. $\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)$.

72. $\left(4m^{-\frac{4}{3}} - 6m^{-\frac{2}{3}} + 9\right)\left(2m^{-\frac{2}{3}} + 3\right)$.

73. $(2x^{-1} - 7 - 3x)(4x^{-1} + 5)$.

74. $10m^{-3}n^{-\frac{7}{2}} : 5m^{5}n^{-3}$.

75. $(a + b) : \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)$.

76. $\left(2x^{\frac{2}{3}} - 20 + 18x^{-\frac{2}{3}}\right) : \left(x + 2x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}\right)$.

Elevar a la potencia indicada las cantidades siguientes:

77. $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{6}$.

78. $\left(m^{\frac{1}{4}}\right)^{3}$.

79. $\left(3n^{\frac{2}{5}}\right)^{3}$.

80. $\left(a^{2}\right)^{-5}$.

81. $\left(m^{-\frac{8n}{4}}\right)^{\frac{2}{9n}}$.

82. $\left(x^{\frac{m}{n}-1}\right)^{\frac{m}{m-n}}$.

83. $\left(m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{2}{5}}\right)^{3}$.

2

PROPIEDADES DE LOS RADICALES

304. Multiplicar el radicando por un factor. Sea la expresión $2a\sqrt{5b}$.

Se puede escribir:

$$2a\sqrt{5b} = \sqrt{(2a)^{2}}\sqrt{5b} = \sqrt{4a^{2} \times 5b} = \sqrt{20a^{2}b}$$

Análogamente, la expresión $3x\sqrt[3]{2xy}$ se transforma en:

$$3x\sqrt[3]{2xy} = \sqrt[3]{27x^{3} \times 2xy} = \sqrt[3]{54x^{4}y}.$$

: *Puede multiplicarse el radicando por un factor, elevando primero ese factor a una potencia de exponente igual al índice del radical.*

305. Factor del radicando puesto como factor del radical. Muchas veces tiene que efectuarse la operación inversa de la que se acaba de exponer.

Sea la expresión $\sqrt{9a^{2}b}$.

Descomponiendo el radicando en dos factores tales que uno sea cuadrado perfecto, puede escribirse:

$$\sqrt{9a^2b} = \sqrt{9a^2 \times b} = \sqrt{9a^2} \times \sqrt{b} = 3a\sqrt{b}.$$

Del mismo modo, la expresión $\sqrt[3]{128x^7}$ se transforma en:

$$\sqrt[3]{128x^7} = \sqrt[3]{2^6x^6 \times 2x} = \sqrt[3]{2^6x^6} \times \sqrt[3]{2x} = 4x^2\sqrt[3]{2x}.$$

Si el radicando contiene algún factor de grado igual o superior al índice, puede ponerse total o parcialmente como coeficiente del radical; para eso:

1º *Descompóngase el radicando en dos factores tales que el coeficiente numérico y las literales de uno de ellos sean la potencia máxima de exponente divisible entre el índice del radical.*

2º *Extráigase la raíz indicada del coeficiente numérico de dicho factor, y divídase el exponente de cada literal entre el índice del radical.*

306. Propiedad importante. Sea la expresión $\sqrt[3]{a^2}$ que, según se ha visto, equivale a $a^{\frac{2}{3}}$.

Si se multiplican ambos términos del exponente $\frac{2}{3}$ por un mismo número, 3 por ejemplo, el valor del quebrado no se altera, y se obtiene, sucesivamente,

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2\times3}{3\times3}} = a^{\frac{6}{9}} = \sqrt[9]{a^6}.$$

Inversamente, dada la expresión $\sqrt[8]{a^{12}} = a^{\frac{12}{8}}$, pueden dividirse ambos términos del exponente $\frac{12}{8}$ entre 4, sin alterar el valor del quebrado, y resulta:

$$\sqrt[8]{a^{12}} = a^{\frac{12:4}{8:4}} = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}.$$

Pueden multiplicarse por un mismo factor, o dividirse entre un mismo divisor el índice y el exponente del radicando, sin que se altere el valor del radical.

Así se tiene, sucesivamente:

$$1º\quad \sqrt{a} = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[8]{a^4} = \sqrt[14]{a^7} = \ldots$$
$$2º\quad \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[9]{a^6} = \sqrt[12]{a^8} = \ldots$$
$$3º\quad \sqrt[16]{a^{32}} = \sqrt[8]{a^{16}} = \sqrt[4]{a^8} = \sqrt{a^4} = a^2.$$
$$4º\quad \sqrt[63]{a^{42}} = \sqrt[21]{a^{14}} = \sqrt[3]{a^2}.$$

307. Reducir dos o más radicales a otros de igual índice. Para multiplicar dos o más radicales, es preciso que tengan igual índice. Si así no fuera, se reducen primero los radicales a otros respectivamente equivalentes, pero de igual índice.

EJEMPLO: Reducir $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{5}$ a radicales equivalentes de igual índice. Por lo expuesto en el número anterior, se puede escribir:

$$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27};$$
$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}.$$

Del mismo modo se transforman los radicales siguientes:

$$\sqrt{5a} = \sqrt[30]{(5a)^{15}} = \sqrt[30]{5^{15}a^{15}};$$
$$\sqrt[3]{2m} = \sqrt[30]{(2m)^{10}} = \sqrt[30]{2^{10}m^{10}};$$
$$\sqrt[5]{4n} = \sqrt[30]{(4n)^6} = \sqrt[30]{4^6n^6}.$$

Para reducir dos o más radicales a otros equivalentes de igual índice, en cada radical se multiplican el índice y el exponente de cada factor del radicando por el producto de los índices de los demás radicales.

308. Observación. Es preferible, cuando se pueda, reducir los radicales a su *menor índice común*.

EJEMPLOS: 1º Reducir $\sqrt{3}$ y $\sqrt[4]{25}$ a radicales equivalentes tales que su índice común sea mínimo.

Evidentemente, puede tomarse 4 como índice común, y se tiene:

$$\sqrt{3} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[4]{9} \quad \text{y} \quad \sqrt[4]{25}.$$

2º Sea también reducir al menor índice común $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt[4]{6}$.

El menor índice común es el m. c. m. de 2, 3 y 4 que es 12.

Por tanto: $\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6}$; $\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4}$; $\sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3}$.

Para reducir dos o más radicales a su menor índice común:

1º *Hállese el m. c. m. de los índices de los radicales.*

2º *En cada radical multiplíquense el índice y el exponente de cada factor del radicando por el cociente del menor índice común entre el índice del respectivo radical.*

309. **Comparación de dos radicales.** Además de reducir dos o más radicales a un mismo índice para poderlos multiplicar, o dividir, se hace la misma operación cuando se quiere comparar su relativa magnitud.

Así, si se quiere saber cuál de los dos radicales $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{11}$ es el mayor, se los reduce a radicales de igual índice, y se tiene:

$$\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125};$$
$$\sqrt[3]{11} = \sqrt[6]{11^2} = \sqrt[6]{121}.$$

Por tanto: $\sqrt{5} > \sqrt[3]{11}$.

310. **Simplificación de un radical.** Las expresiones $\sqrt{32a^3b}$ y $\sqrt[6]{8a^9b^{12}}$ pueden escribirse sucesivamente (Nos. 307 y 306):

$$\sqrt{32a^3b} = \sqrt{16a^2 \times 2ab} = 4a\sqrt{2ab};$$
$$\sqrt[6]{8a^9b^{12}} = \sqrt[6]{2^3a^9b^{12}} = \sqrt{2a^3b^4} = ab^2\sqrt{2a}.$$

En casos como éstos, se dice que los radicales han sido simplificados, o se han reducido a su más simple expresión.

Luego: ***Para simplificar un radical, suprímanse todos los factores comunes al índice y al grado del radicando.***

311. **Aplicaciones.** Simplificar o reducir a su más simple expresión:

1º $\sqrt[3]{24}$ y $\sqrt{3m^3n - 12m^2n^2 + 12mn^3}$.

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3};$$
$$\sqrt{3m^3n - 12m^2n^2 + 12mn^3} = \sqrt{3mn(m^2 - 4mn + 4n^2)}$$
$$= \sqrt{3mn(m-2n)^2} = (m-2n)\sqrt{3mn}.$$

2º $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[9]{64}$ y $\sqrt[12]{27a^6x^3}$.

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2;$$
$$\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{4^3} = \sqrt[3]{4};$$
$$\sqrt[12]{27a^6x^3} = \sqrt[12]{3^3a^6x^3} = \sqrt[4]{3a^2x}.$$

312. **Observación.** En el ejemplo siguiente se puede ver cómo se procede para reducir un radical a su más simple expresión, cuando el radicando es un quebrado.

Sea reducir a su más simple expresión $\sqrt[3]{\frac{2}{7a}}$.

Multiplíquense ambos términos del quebrado por $(7a)^2$; el denominador se transforma en cubo perfecto, y puede, por tanto, ponerse como coeficiente del radical. Se tiene pues:

$$\sqrt[3]{\frac{2}{7a}} = \sqrt[3]{\frac{2(7a)^2}{(7a)^3}} = \frac{1}{7a}\sqrt[3]{98a^2}.$$

La operación efectuada es, en realidad, la *racionalización* del denominador, de la cual se tratará más extensamente en el capítulo siguiente.

313. **Radicales semejantes.** *Llámanse radicales semejantes aquellos que tienen iguales el índice y el radicando, o sea, que sólo difieren por el coeficiente*; v. gr.:

$$3\sqrt{a}, \quad -2b\sqrt{a}, \quad 7m\sqrt{a}.$$

Para saber si dos radicales son semejantes, hay que reducirlos primero a su forma más sencilla.

Así, $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ y $\sqrt{50}$ son radicales semejantes.

En efecto: $\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 4} = 2\sqrt{2}$;
$\sqrt{50} = \sqrt{2 \times 25} = 5\sqrt{2}$.

Son también semejantes $\sqrt{x^3y}$ y $3\sqrt{xy}$, puesto que

$$\sqrt{x^3y} = \sqrt{xy \times x^2} = x\sqrt{xy}.$$

EJERCICIO 53

Introducir el coeficiente o factor dentro del radical:

1. $2\sqrt{3}$.
2. $6\sqrt{2}$.
3. $5\sqrt{a}$.
4. $a^2\sqrt[3]{3}$.
5. $-3\sqrt[3]{-2}$.
6. $5\sqrt[3]{5}$.
7. $2a^3\sqrt[3]{-a^5}$.
8. $(3a-1)^3\sqrt{3a-1}$.
9. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{16}{5}}$.

10. $2\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

11. $3a\sqrt{\frac{1}{27a^3}}$.

12. $x^3\sqrt{\frac{5}{x^3}}$.

13. $2(a-b)\sqrt{a-b}$.

14. $\frac{1-a}{a}\sqrt{\frac{(a-1)^4}{a^4}}$.

15. $\frac{m}{a+1}\sqrt[3]{\frac{m^3}{(a+1)^3}}$.

16. $x\sqrt{\frac{1}{x}}$.

17. $3m\sqrt{5m}$.

18. $\frac{a}{c}\sqrt{ac}$.

19. $\frac{8}{9}\sqrt{\frac{9}{8}}$.

20. $(m-n)\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$.

Reducir a igual índice las expresiones siguientes:

21. a^3, $\sqrt{b^3}$.

22. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$.

23. $(a+b)^2$, $\sqrt[3]{a^4}$.

24. $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$.

25. $\sqrt[4]{a^6}$, $\sqrt[5]{a^7}$.

26. 4, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, a.

27. $\sqrt[5]{mn}$, $\sqrt[4]{rs}$.

28. $\sqrt{a^2b}$. $\sqrt[3]{a^3b^2}$.

29. $\sqrt{\frac{1}{a}}$, $\sqrt[3]{\frac{2}{b^2}}$.

30. $\sqrt{3a}$, $\sqrt[4]{2b}$, $\sqrt{6c}$.

31. ¿Qué es mayor, $\sqrt[5]{10}$ ó $\sqrt[3]{4}$?

32. ¿Qué es mayor, $\sqrt[3]{11}$ ó $\sqrt{5}$?

33. Ordenar, según magnitud creciente: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$.

34. Ordenar, según magnitud decreciente: $\sqrt[6]{6}$, $\sqrt[8]{11}$, $\sqrt[12]{35}$.

Reducir a su más simple expresión los radicales siguientes:

35. $\sqrt{50}$.

36. $\sqrt{180}$.

37. $\sqrt{108}$

38. $\sqrt{750}$.

39. $\sqrt{63}$.

40. $\sqrt[3]{16}$.

41. $\sqrt[3]{128}$.

42. $\sqrt[3]{54}$.

43. $\sqrt{56}$.

44. $\sqrt[3]{250}$.

45. $\sqrt[3]{81}$.

46. $\sqrt[3]{625}$.

47. $\sqrt{x^5+x^4}$.

48. $\sqrt[3]{a^5x}$.

49. $\sqrt[3]{128x^5y^4}$.

50. $\sqrt{a^4b^6c}$.

51. $\sqrt[3]{x^7-x^6}$.

52. $\sqrt[4]{32x^9-64x^{10}}$.

53. $\sqrt[6]{a^4b^2c^6d^8}$.

54. $\sqrt[6]{16a^2d^6}$.

55. $\sqrt[3]{a^4b^5c^{10}}$.

56. $\sqrt{8a^4b^3-16a^4b^4}$.

57. $\sqrt{225a^6b^8}$.

58. $\sqrt[6]{16a^2(a-b)^4d^6}$.

59. $-\sqrt[3]{-\frac{a^6}{b^9}}$.

60. $\sqrt{a^2-a^4}$.

61. $\sqrt[3]{24a^5b^7c^5}$.

62. $\sqrt{\left(\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}\right)^3\left(\frac{a^2-b^2}{a^4-b^4}\right)^4}$.

63. $\sqrt[3]{32x^3(x^2-a^2)^5}$.

64. $\sqrt[5]{96a^5b^9c^7}$.

65. $\sqrt[3]{128xm^5n^3}$.

66. $\sqrt[6]{256m^5n^3r^{13}}$

67. $\sqrt{108m^5n^6+72m^4n^5}$.

68. $\sqrt{(a^2-4b^2)(a-2b)}$.

69. $\sqrt[3]{135x^5r^5-108x^3n^7}$.

70. $\sqrt{5m^3+30m^2+45m}$.

71. $\sqrt{27a^3c-36a^2c^2+12ac^3}$.

72. $\sqrt{(x^2-x-6)(x^2+2x-15)}$.

73. $\frac{m}{m^2-4}\sqrt{\frac{2m^2-8m+8}{m}}$.

74. $\sqrt{\frac{2}{5}}$.

75. $\sqrt{\frac{2a}{3}}$.

76. $\sqrt{\frac{3+2x^2}{3}}$.

77. $\sqrt[3]{\frac{1}{7a}}$.

78. $\sqrt{\frac{3x}{5m}}$

79. $\sqrt[3]{\frac{5}{16a^5}}$.

Averiguar si son semejantes los radicales siguientes:

80. $\sqrt{75}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{24}$.

81. $\sqrt{98}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{128}$.

82. $\sqrt{27}$, $\sqrt{108}$, $\sqrt{48}$.

83. $\sqrt{5}$, $\sqrt{245}$, $\sqrt{320}$.

84. $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{192}$.

85. $\sqrt[4]{32}$, $\sqrt[4]{162}$.

86. $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{320}$, $\sqrt[3]{72}$.

87. $\sqrt{\frac{9}{2}}$, $\sqrt{\frac{25}{8}}$.

88. $\sqrt{\frac{27}{2}}$, $\sqrt{\frac{8}{3}}$.

89. $\sqrt{\frac{16}{15}}$, $\sqrt{\frac{20}{30}}$, $\sqrt{\frac{3}{5}}$

3

OPERACIONES CON RADICALES

I. SUMA Y RESTA DE RADICALES

314. Suma de radicales. Dos o más radicales se pueden sumar algebraicamente siempre que sean semejantes.

Para sumar algebraicamente radicales semejantes, súmense los coeficientes y póngase el resultado obtenido como coeficiente del radical común.

EJEMPLOS: 1º Efectuar: $2\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 9\sqrt{5}$.

$$2\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 9\sqrt{5} = (2 - 5 + 9)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}.$$

2º Sumar $\sqrt{48}$ con $\sqrt{75}$.

Reduciéndolos a su forma más sencilla, se obtiene:

$$\sqrt{48} + \sqrt{75} = \sqrt{3 \times 16} + \sqrt{3 \times 25} = 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$$
$$= (4 + 5)\sqrt{3} = 9\sqrt{3}.$$

315. Resta de radicales. *La resta de radicales se efectúa como la suma, con la única diferencia que antes se cambian los signos del sustraendo.*

EJEMPLOS: 1º Restar $2\sqrt{3} - \sqrt{x}$ de $4\sqrt{3} + 3\sqrt{x}$.

$$(4\sqrt{3} + 3\sqrt{x}) - (2\sqrt{3} - \sqrt{x}) = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{x} - 2\sqrt{3} + \sqrt{x}$$
$$= 2\sqrt{3} + 4\sqrt{x}.$$

2º Efectuar la resta $\sqrt{128} - \sqrt{72}$.

$$\sqrt{128} - \sqrt{72} = \sqrt{64 \times 2} - \sqrt{36 \times 2}$$
$$= 8\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

II. MULTIPLICACION DE RADICALES

316. Producto de radicales de igual índice. **Sea el producto $\sqrt{6} \times \sqrt{24}$.**

Se puede escribir la siguiente igualdad:

$$\sqrt{6} \times \sqrt{24} = \sqrt{6 \times 24} = \pm 12$$

puesto que elevando sus dos miembros al cuadrado, se obtiene el mismo resultado, o sea, $6 \times 24 = 144$

Y en general: $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$.

Por tanto: ***Para multiplicar dos o más radicales de igual índice, multipliquense los radicandos y aféctese el producto de un radical de igual índice que el de los factores.***

317. Observación. Si los radicales cuyo producto se busca no tienen igual índice, se reducen primero a otros equivalentes de igual índice, y luego se opera como en el caso anterior.

318. Aplicaciones. **Efectuar los productos siguientes y simplificar:**

1º $\sqrt{6}$ por $\sqrt{24}$.

$$\sqrt{6} \times \sqrt{24} = \sqrt{6 \times 24} = \sqrt{144} = 12.$$

2º $\sqrt{2m}$ por $\sqrt[3]{4m^2}$.

Reduciendo a radicales equivalentes de igual índice, se tiene:

$$\sqrt{2m} \times \sqrt[3]{4m^2} = \sqrt[6]{(2m)^3} \times \sqrt[6]{(4m^2)^2} = \sqrt[6]{(2m)^3(4m^2)^2}$$
$$= \sqrt[6]{8m^3 \times 16m^4} = \sqrt[6]{2^7 m^7} = 2m\sqrt[6]{2m}.$$

3º $\sqrt[3]{3x}$ por $\sqrt[4]{27x^2}$.

Reduciendo a radicales equivalentes de igual índice, se tiene:

$$\sqrt[3]{3x} \times \sqrt[4]{27x^2} = \sqrt[12]{(3x)^4} \times \sqrt[12]{(3^3x^2)^3} = \sqrt[12]{(3x)^4}\sqrt[12]{(3x)^9}$$
$$= \sqrt[12]{(3x)^4 \times (3x)^9} = \sqrt[12]{(3x)^{13}} = 3x\sqrt[12]{3x}.$$

4º $5-2\sqrt{3}$ por $4+3\sqrt{3}$.

Aplicando la regla para multiplicar polinomios, se tiene:

$$\begin{array}{r} 5- \ 2\sqrt{3} \\ 4+ \ 3\sqrt{3} \\ \hline 20- \ 8\sqrt{3} \\ \quad +15\sqrt{3}-18 \\ \hline 20+ \ 7\sqrt{3}-18 \end{array} = 2+7\sqrt{3}.$$

319. Producto de radicales imaginarios. Si se tienen que multiplicar dos o más radicales imaginarios, por ejemplo $\sqrt{-a}$ por $\sqrt{-b}$, es preciso tener en cuenta lo que se ha expuesto en el No. 295.

Así: $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a(-1)}\times\sqrt{b(-1)}=\sqrt{ai^2}\times\sqrt{bi^2}$
$=i\sqrt{a}\times i\sqrt{b}=i^2\sqrt{ab}=-\sqrt{ab}.$

Análogamente:

1º $\sqrt{-a^2}\times\sqrt{-b^2}=\sqrt{a^2(-1)}\times\sqrt{b^2(-1)}=\sqrt{a^2i^2}\times\sqrt{b^2i^2}$
$=ai\times bi=abi^2=-ab.$

2º $(a+b\sqrt{-1})^2=(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=a^2+2abi-b^2.$

EJERCICIO 54

Efectuar las operaciones indicadas:

1. $5\sqrt{8}-3\sqrt{2}$.
2. $2\sqrt{128}-\sqrt{200}$.
3. $\sqrt{24}+3\sqrt{6}$.
4. $\sqrt{216}-\sqrt{150}$.
5. $5\sqrt{a}+7\sqrt{a}$.
6. $\sqrt{2}-\sqrt{50}+\sqrt{98}$.
7. $\sqrt{12}-\sqrt{48}+\sqrt{75}$.
8. $\sqrt{45}-\sqrt{80}+\sqrt{125}$.
9. $\sqrt{28}+\sqrt{7}-\sqrt{63}$.
10. $\sqrt{4x-8}+\sqrt{9x-18}$.
11. $2\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{256}$.
12. $\sqrt[3]{-8}+\sqrt[3]{-64}$.
13. $6\sqrt[3]{375}-10\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}$.
14. $5\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{250}+4\sqrt[3]{432}$.
15. $\sqrt{27}+2\sqrt{48}-3\sqrt{75}$.
16. $3\sqrt{432}-4\sqrt{3}+\sqrt{147}$.

17. $\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{162}+\sqrt[4]{512}-\sqrt[4]{1\,250}$.
18. $\sqrt{4x^3y}+\sqrt{25xy^3}-x\sqrt{xy}$.
19. $\sqrt{ax^3-bx^3}+\sqrt{4ar^3-4br^3}$.
20. $\sqrt{a^3-a^2b}-\sqrt{ab^2-b^3}-\sqrt{a-b}$.
21. $\sqrt{a}+3\sqrt{2a}-2\sqrt{3a}+\sqrt{4a}-\sqrt{8a}+\sqrt{12a}$.
22. $\sqrt{(m-n)^3a}+\sqrt{(m+n)^3a}-\sqrt{am^3}+\sqrt{a(1-m)^3}-\sqrt{a}$
23. $\sqrt[3]{x}+\sqrt{4x}-\sqrt{9x}+\sqrt[3]{8x}-\sqrt{25x}$.

24. $4\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{16}}-3\sqrt{27}$.
25. $2\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{60}+\sqrt{\frac{3}{5}}$.
26. $\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{18}{7}}-\sqrt{\frac{25}{14}}$.
27. $\sqrt{\frac{16}{15}}-\sqrt{\frac{20}{3}}+\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Efectuar los productos siguientes:

28. $\sqrt{2}\times\sqrt{12}$.
29. $\sqrt{3}\times\sqrt{15}$.
30. $\sqrt{21}\times\sqrt{3}$.
31. $\sqrt{15}\times\sqrt{5}$.
32. $\sqrt{5}\times\sqrt{10}$.
33. $\sqrt{32}\times\sqrt{2}$.
34. $2\sqrt{12}\times3\sqrt{48}$.
35. $3\sqrt{27}\times2\sqrt{6}$.
36. $2\sqrt{2}\times3\sqrt{10}\times5\sqrt{80}$.
37. $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$.
38. $(5\sqrt{2}-1)(4\sqrt{2}+3)$.
39. $(7\sqrt{2}-4\sqrt{5})(3\sqrt{2}-8\sqrt{5})$.
40. $(4\sqrt{x+1}-5\sqrt{x-1})(3\sqrt{x+1}-2\sqrt{x-1})$.
41. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.
42. $(1-\sqrt{a})^2$.
43. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$.
44. $(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})$.
45. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.
46. $(3\sqrt{a}-2\sqrt{b})^2$.
47. $(a\sqrt{b}-b\sqrt{a})^2$.
48. $(3a\sqrt{b}+2b\sqrt{a})^2$.

Efectuar las multiplicaciones indicadas, haciendo la sustitución $\sqrt{-1} = i$:

49. $2\sqrt{-12} \times 5\sqrt{-48}$.

50. $(\sqrt{-4} + \sqrt{-6})\sqrt{-8}$.

51. $(3 - \sqrt{-2})(5 - \sqrt{-6})$.

52. $(3 - \sqrt{-7})(2 - \sqrt{-3})$.

53. $(\sqrt{-3} + \sqrt{-5})(\sqrt{-3} - \sqrt{-5})$.

54. $(3\sqrt{2} - \sqrt{-3})(5\sqrt{2} - 3\sqrt{-5})$.

55. $(b + \sqrt{-c})(b - \sqrt{-c})$.

56. $(c + d\sqrt{-1})(c - d\sqrt{-1})$.

57. $(5\sqrt{-8} + 6\sqrt{32})\sqrt{-2}$.

58. $(m + \sqrt{-n})(m - \sqrt{-n})$.

59. Demuéstrese que para obtener el producto de $a^{\frac{2}{3}}$ por $a^{\frac{5}{4}}$ se suman los exponentes.

III. DIVISION DE RADICALES

320. División de radicales de igual índice. Según se ha visto en la multiplicación:

$$\sqrt{5} \times \sqrt{16} = \sqrt{5 \times 16} = \sqrt{80}.$$

Debe tenerse inversamente:

$$\sqrt{80} : \sqrt{16} = \sqrt{80 : 16} = \sqrt{5}.$$

Y en general: $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$.

Por tanto: *Para dividir dos radicales de igual índice, divídase el radicando del dividendo entre el del divisor, y aféctese el cociente de un radical de igual índice que el del dividendo y del divisor.*

321. Observación. Si los radicales cuyo cociente se busca no tienen igual índice, se reducen primero a radicales equivalentes de igual índice, y luego se opera como en el caso anterior.

322. Aplicaciones. Dividir y simplificar:

1º $\sqrt{175}$ entre $\sqrt{7}$.

$$\sqrt{175} : \sqrt{7} = \sqrt{175 : 7} = \sqrt{25} = \pm 5.$$

2º $\sqrt[3]{216}$ entre $\sqrt[3]{6}$.

$$\sqrt[3]{216} : \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{216 : 6} = \sqrt[3]{36}.$$

3º $\sqrt[3]{15}$ entre $\sqrt{6}$.

Reduciendo a radicales equivalentes de igual índice, se tiene:

$$\frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt[6]{15^2}}{\sqrt[6]{6^3}} = \sqrt[6]{\frac{(3 \times 5)^2}{(2 \times 3)^3}} = \sqrt[6]{\frac{3^2 \times 5^2}{2^3 \times 3^3}} = \sqrt[6]{\frac{5^2}{2^3 \times 3}} = \sqrt[6]{\frac{25}{24}}.$$

IV. RACIONALIZACION

323. Fracciones irracionales. Si la división entre dos radicales se indica en forma de quebrado, da muchas veces origen a una *fracción irracional.*

Fracción irracional es aquella en que figura un radical irracional en uno de sus términos o en ambos.

Así, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 4}$ son fracciones irracionales.

324. Racionalización. Conviene en muchos casos, en vista de ciertas aplicaciones, transformar una fracción irracional en otra equivalente cuyo numerador o denominador sea racional.

La operación que debe efectuarse para conseguirlo se llama *racionalización.*

EJEMPLOS: 1º La fracción irracional $\frac{2}{\sqrt{5}}$ puede escribirse:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

La nueva fracción es equivalente a la primera y tiene el denominador racional.

2º Puede, análogamente, racionalizarse el numerador. Así, la fracción $\frac{\sqrt{5}}{2}$ puede escribirse:

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{5}{2\sqrt{5}}.$$

En ambos casos, $\sqrt{5}$ que ha servido para racionalizar, se llama *factor racionalizador.*

La operación que más frecuentemente se presenta es la de racionalizar el denominador.

Para racionalizar el denominador de una fracción:

1º *Búsquese una expresión que, multiplicada por el denominador, dé un producto racional.*

2º *Multiplíquense ambos términos del quebrado por dicha expresión o factor racionalizador.*

325. Racionalizar un denominador binomio. Sea la expresión $\frac{6}{2-\sqrt{3}}$, cuyo denominador se quiere racionalizar.

Si se multiplican ambos términos del quebrado por $(2+\sqrt{3})$, el valor del quebrado no se altera y se tiene:

$$\frac{6}{2-\sqrt{3}} = \frac{6(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{12+6\sqrt{3}}{4-3} = 12+6\sqrt{3}.$$

Los dos binomios $2-\sqrt{3}$ y $2+\sqrt{3}$, que sólo difieren por el signo del segundo término, se llaman *binomios conjugados.*

326. Aplicaciones. Racionalizar el denominador de:

$$\frac{6}{\sqrt{8}-\sqrt{6}} \quad \text{y} \quad \frac{m}{a+\sqrt{b}}.$$

Multiplíquense ambos términos de las fracciones por el binomio conjugado del denominador y se obtiene:

$$\frac{6}{\sqrt{8}-\sqrt{6}} = \frac{6(\sqrt{8}+\sqrt{6})}{(\sqrt{8}-\sqrt{6})(\sqrt{8}+\sqrt{6})} = \frac{6(\sqrt{8}+\sqrt{6})}{8-6}$$

$$= \frac{6(\sqrt{8}+\sqrt{6})}{2} = 3(\sqrt{8}+\sqrt{6}).$$

$$\frac{m}{a+\sqrt{b}} = \frac{m(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} = \frac{m(a-\sqrt{b})}{a^2-b}.$$

327. Observación. Puede racionalizarse el denominador formado de tres términos irracionales, pero esto no se consigue con una sola multiplicación. En el ejemplo siguiente puede verse la manera de hacer la racionalización.

Racionalizar el denominador de la expresión $\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

Considerando $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ como un sólo término, se tiene:

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{m[(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}]}{[(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}][(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}]}.$$

$$= \frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c} = \frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{a+b+2\sqrt{ab}-c}.$$

Basta ahora multiplicar ambos términos del último resultado por el conjugado de $(a+b-c)+2\sqrt{ab}$ y resulta:

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})[(a+b-c)-2\sqrt{ab}]}{[(a+b-c)+2\sqrt{ab}][(a+b-c)-2\sqrt{ab}]}$$

$$= \frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab}.$$

328. Ventajas de la racionalización. Si se desea calcular el valor numérico de una fracción con denominador irracional, se simplifica mucho el trabajo si se racionaliza primero el denominador.

Así, si se quiere calcular el valor numérico de $\frac{2}{\sqrt{3}}$, dada $\sqrt{3}=1.73205\ldots$, el resultado pedido se obtiene más rápidamente comenzando por la racionalización.

Efectivamente:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\times 1.73205\ldots}{3} = \frac{3.46410\ldots}{3} = 1.15470\ldots$$

EJERCICIO 55

Efectuar las divisiones indicadas y reducir:

1. $\sqrt{108} : \sqrt{3}$.
2. $\sqrt{216} : \sqrt{6}$.
3. $\sqrt{98} : \sqrt{2}$.
4. $\sqrt[3]{72} : \sqrt[3]{9}$.
5. $\sqrt[3]{256} : \sqrt[3]{4}$.
6. $\sqrt[3]{136} : \sqrt[3]{17}$.
7. $\sqrt[3]{a^3} : \sqrt{a^2}$.
8. $5\sqrt[6]{81} : \sqrt[4]{9}$.
9. $\sqrt[3]{3m^3} : \sqrt[4]{m^2}$.
10. $\sqrt{28x} : \sqrt[4]{56x}$.
11. $\sqrt[3]{x^5y^3} : \sqrt[3]{x^2}$.
12. $8a\sqrt{b^4c^6} : \sqrt{16a^2}$.
13. $\sqrt[3]{14m^3n} : \sqrt[5]{28mn^3}$.
14. $\sqrt[3]{27a^4b^5} : \frac{1}{9}\sqrt[3]{9a^2b^4}$.

15. $\sqrt{\frac{21}{44}} : \sqrt{\frac{28}{33}}$.

16. $\sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt{\frac{1}{2}}$.

17. $\sqrt{\frac{3}{5}} : \sqrt{\frac{5}{6}}$.

18. $\sqrt[3]{\frac{12}{25}} : \sqrt[3]{\frac{9}{20}}$.

19. $\sqrt{\frac{2}{5}} : \sqrt[3]{\frac{4}{25}}$.

20. $\sqrt{\frac{3n^3}{7m}} : \sqrt{\frac{3m}{2n}}$.

21. $\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} : \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$.

22. $\sqrt[4]{\frac{3}{8}} : \sqrt[3]{\frac{9}{16}}$.

23. $\sqrt{-a^5} : \sqrt{-a^4}$.

24. $\sqrt{-12} : \sqrt{-6}$.

25. $(-\sqrt[3]{-a^7}) : (-\sqrt{a^3})$.

26. $3 : \sqrt{.0036 : 7.2}$.

27. Demuéstrese que $a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}$.

Reducir las fracciones siguientes a otras equivalentes con denominadores racionales:

28. $\frac{2}{\sqrt{2}}$.

29. $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$.

30. $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

31. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$.

32. $\frac{15}{2\sqrt{3}}$.

33. $\frac{a}{\sqrt[5]{a^4}}$.

34. $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

35. $\frac{3}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}$.

36. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

37. $\frac{1}{a-\sqrt{b}}$.

38. $\frac{1}{10+\sqrt{7}}$.

39. $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}$.

40. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

41. $\frac{\sqrt{a-b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a-b}-\sqrt{a}}$.

42. $\frac{7}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

Admitiendo que:

$$\sqrt{2} = 1.414, \quad \sqrt{3} = 1.732, \quad \sqrt{5} = 2.236, \quad \sqrt{6} = 2.449,$$

calcúlese el valor aproximado de las expresiones siguientes:

43. $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

44. $\frac{8}{\sqrt{3}}$.

45. $\sqrt{15}$.

46. $\sqrt{10}$.

47. $\sqrt{30}$.

48. $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$.

49. $\frac{1}{2+\sqrt{6}}$.

50. $\frac{4}{3+2\sqrt{5}}$.

51. $\frac{5}{7-2\sqrt{2}}$.

52. $\frac{8}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$.

53. $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

54. $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

55. $\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$.

56. $\frac{\sqrt{6}-4\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+5\sqrt{3}}$.

V. POTENCIA Y RAIZ DE UN RADICAL

329. Potencia de un radical. Sea elevar $\sqrt[3]{a^2}$ a la quinta potencia.

Se tiene (Nº 303): $(\sqrt[3]{a^2})^5 = a^{\frac{2}{3}\times 5} = a^{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{a^{10}}$.

Y en general: $(\sqrt[n]{a^m})^r = \sqrt[n]{a^{mr}}$.

Luego: *Para elevar un radical a cierta potencia, elévese el radicando a dicha potencia, y aféctese ésta de un radical de índice igual al del radical dado.*

330. Raíz de un radical. Sea extraer la raíz sexta de $\sqrt[3]{a^4}$

Según el Nº 303: $\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^4}} = a^{\frac{4}{3}:6} = a^{\frac{4}{18}} = \sqrt[18]{a^4} = \sqrt[9]{a^2}$.

Y en general: $\sqrt[n]{\sqrt[r]{a^m}} = \sqrt[nr]{a^m}$.

Por tanto: *La raíz enésima de un radical es otro radical cuyo índice es el producto del índice del radical dado por* n.

331. Aplicaciones. Efectuar las operaciones siguientes y simplificar:

1º $(\sqrt{a^3})^4 = \sqrt{a^{12}} = a^6$.

2º $(\sqrt[5]{ab^2})^3 = \sqrt[5]{(ab^2)^3} = \sqrt[5]{a^3b^6} = b\sqrt[5]{a^3b}$.

3º $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$.

4º $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^3}}} = \sqrt[8]{a^3} = \sqrt[4]{a^3}$.

5º $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{a^2b^3}}} = \sqrt[24]{a^3b^3}$.

EJERCICIO 56

Elevar a la potencia que se indica y simplificar:

1. $(\sqrt{4})^2$.
2. $(\sqrt[3]{-a^2})^3$.
3. $(\sqrt{5})^2$.
4. $(3\sqrt[3]{3})^4$.
5. $(\sqrt[3]{a^2})^2$.
6. $\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^2\left(\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2$.
7. $(\sqrt[3]{9}-\sqrt{2})^2$.
8. $(\sqrt[3]{10}-\sqrt{4})^2$.

Extraer la raíz que se indica y simplificar.

9. $\sqrt{\sqrt[5]{81}}$.
10. $\sqrt[4]{\sqrt{10}}$.
11. $\sqrt[5]{\sqrt[6]{32a^5}}$
12. $\sqrt[4]{\sqrt[7]{81m^4n^8}}$.
13. $\sqrt{16\sqrt[3]{9}}$.
14. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}$.
15. $\sqrt[3]{27x^3\sqrt[3]{5x}}$
16. $\sqrt[6]{\sqrt{125}}$.
17. $\sqrt{9\sqrt{8}}$.
18. $\sqrt{9\sqrt{16\sqrt{256}}}$.

Efectuar las operaciones indicadas:

19. $\sqrt{3a^2+\sqrt{6a^4-\sqrt{25a^8}}}$.
20. $\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}$
21. $\left(\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c\sqrt{d}}}}\right)^{32}$.
22. $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^3b^2c}}}}\right)^{32}$.
23. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{5a^2m}}}$.
24. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2m^2n^3x}}}$.

VI. ECUACIONES IRRACIONALES

332. Ecuación irracional. *Una ecuación en que figura algún radical, se llama ecuación irracional;* v. gr.:

$$\sqrt{x+3}=5,$$
$$2\sqrt{x-4}=10,$$
$$\sqrt{3x+10}=\sqrt{2x+6}+1.$$

La resolución de estas ecuaciones descansa en este principio: *Si ambos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia, la ecuación que resulta es aún cierta.*

EJEMPLOS: 1º Sea resolver la ecuación $\sqrt{3x+13}=7$.

Elévese al cuadrado: $3x+13=49$

Despéjese x: $3x=36$

$x=12$.

COMPROBACIÓN: $\sqrt{3\times 12+13}=\sqrt{49}=7$.

2º Resolver la ecuación $\sqrt{x+10}-\sqrt{x}=2$.

En casos como éste, en que hay dos radicales, conviene despejar uno de ellos y proceder como se indica a continuación.

Ecuación dada: $\sqrt{x+10}=\sqrt{x}+2$.

Elévese al cuadrado: $x+10=x+4\sqrt{x}+4$

Redúzcase: $6=4\sqrt{x}$

$3=2\sqrt{x}$

Elévese al cuadrado: $9=4x$

Resuélvase: $x=\frac{9}{4}$.

COMPROBACIÓN: $\sqrt{\frac{9}{4}+10}-\sqrt{\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{49}{4}}-\sqrt{\frac{9}{4}}=2$.

EJERCICIO 57

Resolver las ecuaciones irracionales siguientes, y comprobar.

1. $\sqrt{5x-1}=7$.
2. $\sqrt{3x-9}=6$.
3. $\sqrt{3z+4}=5$.
4. $10=\sqrt{7x-5}$.
5. $3\sqrt{8z}=12$.
6. $6\sqrt{7-x}=14$.
7. $2\sqrt{5x-4}=12$.
8. $6\sqrt{7x-10}=12$.
9. $7\sqrt{5x+19}=56$.
10. $\sqrt{7y+1}-5=3$.
11. $\sqrt{x^2-9}=x-3$.
12. $\sqrt{z^2+65}=z+5$.
13. $\sqrt{\frac{n}{4}}=5$.
14. $\sqrt{\frac{3z}{4}}=6$.
15. $\sqrt{\frac{2x^2-18}{2}}=x-1$.

16. $\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{4}{x-1}$.

17. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+9}=7$.

18. $\sqrt{20+x}-\sqrt{x-1}-3=0$.

19. $\sqrt{y}-\sqrt{y-12}=2$.

20. $\sqrt{u}-\sqrt{u-13}-1=0$.

Transformar y calcular, según se indica, cada una de las siguientes fórmulas:

21 $d=a\sqrt{3}$. Calcúlese a, dado $\sqrt{3}=1.732$ y $d=13.856$.

22. $a=\sqrt{\frac{S}{6}}$. Calcúlese S, dado $a=8$.

23. $a=\sqrt[3]{V}$. Calcúlese V, dado $a=5$.

24. $r=\sqrt{\frac{C}{\pi}}$. Calcúlese C, dado $r=7$ y $\pi=\frac{22}{7}$.

25. $r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. Calcúlese V, dado $r=7$.

26. $b=\sqrt{\frac{V}{h}}$. Calcúlese V, dado $b=5$ y $h=8$.

27. $r=\sqrt{\frac{V}{\pi h}}$. Calcúlese V, dado $r=6$ y $h=35$.

EJERCICIO 58

(Suplementario).

Extraer la raíz indicada.

1. $\sqrt{4}$.
2. $\sqrt{25}$.
3. $\sqrt{a^4}$.
4. $\sqrt{a^{12}}$.
5. $\sqrt{a^4b^8}$.
6. $\sqrt[3]{-a^6b^3}$.
7. $\sqrt{16a^4b^8c^{10}}$.
8. $\sqrt[3]{-(a+1)^6}$.
9. $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\times\frac{a}{b^4}}$
10. $\sqrt{\frac{2\times 3^4\times 5\times 10^2}{9\times 16}}$
11. $\sqrt[3]{\frac{216a^3b^6}{125}}$
12. $-\sqrt[3]{-\frac{a^6}{b^9}}$

Simplificar las expresiones:

13. $\sqrt[7]{-a^9b^8c^{16}}$.
14. $\sqrt[12]{\frac{a^4}{(1-a)^8}}$.
15. $\sqrt{a^7}+\sqrt{a^5}-\sqrt{a^3}+\sqrt{a}$.
16. $a\sqrt[5]{b^6c^7d^{12}}-c\sqrt[5]{a^{15}b^6c^{22}d^8}$.
17. $\sqrt{\frac{a}{b^2}-\frac{c}{b^2}}+\sqrt{\frac{a}{c^2}-\frac{1}{c}}$.
18. $3\sqrt{2}\times 4\sqrt{3}\times 5\sqrt{24}$.
19. $\sqrt{a}\times\sqrt[4]{\frac{1}{a^2}}\times\sqrt[6]{a^3}$.
20. $\sqrt{-4}-\sqrt{-1}$.
21. $\sqrt{-8}+\sqrt{-32}$.
22. $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}$.

Reducir a un mismo índice.

23. $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt{2x}$, $\sqrt[4]{2mn}$.
24. $2x^2$, $\sqrt[5]{3a^2}$, $\sqrt{5mn}$.
25. m^4, $\sqrt[5]{a^4}$, $\sqrt{2x^3}$, $\sqrt[4]{5m}$.
26. $\sqrt[3]{a^4}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{2x}$, $\sqrt[4]{5a^3}$.

Desarrollar y reducir.

27. $(\sqrt{-1})^3$.
28. $(\sqrt{-1})^4$.
29. $(\sqrt{-1})^5$.
30. $(\sqrt{-3})^2$.
31. $5\sqrt{-8}\times 3\sqrt{-32}$.
32. $(\sqrt{-5}-\sqrt{-6})^2$.
33. $(3+\sqrt{-4})(3-\sqrt{-4})$.
34. $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})$.

Racionalizar los denominadores

35. $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$.
36. $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.
37. $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$.
38. $\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$.

(En los dos últimos ejercicios aplíquese la fórmula

$$x^3\pm y^3=(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2),$$

haciendo $\sqrt[3]{a}=x$ y $\sqrt[3]{b}=y$.

Efectuar las operaciones indicadas y reducir, después de haber racionalizado los denominadores, según el caso.

39. $\sqrt{a+b}-(\sqrt{a-b})^2$.
40. $\sqrt[3]{-8}+\sqrt[3]{-64}-\sqrt[3]{-216}$.

41. $\sqrt{16a-32}+5\sqrt{49a-98}$.

42. $\sqrt{-4a^3}+\sqrt{-9b^4}-\sqrt{-3bc^3}$.

43. $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}$.

44. $(\sqrt{-2}+\sqrt{-3})^2$.

45. $(2+\sqrt{-1})(2-4\sqrt{-1})$.

46. $\left(\sqrt{ab}+b\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\left(a\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{ab}\right)$.

47. $\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)$.

48. $\frac{5}{a}\sqrt[3]{-a^2}\times\frac{a}{10}\sqrt[5]{a^3b^2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{a^2}$.

49. $\sqrt{a}\times\sqrt[4]{\frac{1}{a^2}}\times\sqrt[6]{a^3}$.

50. $\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\times\sqrt[3]{b\sqrt{a}}$.

51. $\frac{a}{\sqrt{b}}:\frac{b}{\sqrt{a}}$.

52. $\frac{a}{\sqrt[3]{b^2}}:\frac{b}{\sqrt{a^3}}$.

53. $5\sqrt[8]{81}:\sqrt[4]{9}$.

54. $(a+b)\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}:\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}$.

55. $\sqrt{\sqrt{2\sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}}}}}$.

56. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[5]{a^{240}}}}}}$.

57. $\left(\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}}\right)^{12}$.

58. $\left(\sqrt{a^3\sqrt[3]{b^3}}+\sqrt[3]{b^3\sqrt{a^3}}\right):\sqrt[3]{ab}$.

4

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO O CUADRATICAS

I. RESOLUCION DE LA ECUACION INCOMPLETA

333. Definición. *Una ecuación con una sola incógnita es de segundo grado o* **cuadrática**, *cuando, después de reducida a su más simple expresión, el más alto grado de la incógnita es 2.*

334. Forma general de la ecuación de segundo grado. Sea la ecuación $\frac{1}{x-3}+4x=\frac{1}{5}$. (1)

Multiplíquense sus dos miembros por $5(x-3)$, para darle forma entera, y se tiene:

$$5+20x^2-60x=x-3,$$

o, reduciendo y pasando todos los términos al primer miembro:

$$20x^2-61x+8=0.$$

Al igual que la ecuación (1), toda ecuación de segundo grado con una incógnita puede reducirse, efectuando en ella todas las reducciones posibles, a la forma general:

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0,}$$

en la cual a, b y c son coeficientes.

Los coeficientes de la ecuación $20x^2-61x+8=0$, son:

$$a=20,\quad b=-61.\quad c=8.$$

335. Ecuación completa. *La ecuación de segundo grado es completa cuando consta de tres términos: uno en que la incógnita tiene por exponente 2, otro en que el exponente es 1, y un término independiente.*

336. Ecuación incompleta. *La ecuación de segundo grado es incompleta cuando carece de término independiente o del término en* x.

La ecuación incompleta tiene, pues, una de estas dos formas:

$$ax^2 + c = 0, \quad \text{o bien:} \quad ax^2 + bx = 0.$$

337. Cuadráticas puras y cuadráticas mixtas. *Las ecuaciones de la forma* $ax^2 + c = 0$, *se llaman cuadráticas puras; y las de la forma* $ax^2 + bx + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$, *se denominan cuadráticas mixtas.*

338. Resolución de las cuadráticas puras. Sea la ecuación $2x^2 + 7 = \frac{5x^2}{4} + 19$.

Désele forma entera: $8x^2 + 28 = 5x^2 + 76.$

Despéjese x: $3x^2 = 48$

$x^2 = 16$

$x = \pm 4.$

COMPROBACIÓN: $2 \times 16 + 7 = \frac{5 \times 16}{4} + 19.$

339. Generalización. Sea la ecuación $ax^2 + c = 0.$

Despéjese x: $x^2 = -\frac{c}{a}$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Las raíces son, pues: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}; \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$

Luego: *En toda cuadrática pura, la incógnita es igual a más o menos la raíz cuadrada del cociente del término independiente entre el coeficiente de* x^2, *con el signo cambiado.*

Nota. — Para que las raíces sean reales, se necesita que $-\frac{c}{a}$ sea positivo, lo cual exige que a y c tengan signos contrarios, es decir, $ac < 0$.

340. Resolución de las cuadráticas mixtas incompletas. Sea la ecuación $x^2 - 4x = 0$.

Póngase x en factor común: $x(x - 4) = 0$.

Para que un producto se anule, es necesario y basta que se anule uno de los factores.

Si $x = 0$, 0 es una solución;
si $x - 4 = 0$, $x = 4$ es otra solución.

Las raíces de la ecuación son, por tanto: $x_1 = 0$; $x_2 = 4$.

COMPROBACIÓN: $0 - 4 \times 0 = 0$; $4^2 - 4 \times 4 = 0$.

341. Generalización. Sea la ecuación $ax^2 + bx = 0$.

Póngase x en factor: $x(ax + b) = 0$.

Este producto se anula si se anula uno de los factores.

Si $x = 0$, 0 es una solución;

si $ax + b = 0$, se tiene como segunda solución: $x = -\frac{b}{a}$.

Las raíces son, pues: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Por tanto: *La ecuación de segundo grado en que falta el término independiente tiene una raíz nula, y la otra es igual al coeficiente de* x *tomado con signo contrario, dividido entre el coeficiente de* x^2.

EJERCICIO 59

Resolver las siguientes ecuaciones incompletas:

1. $2x^2 - x = 0.$
2. $4x^2 - 32x = 0.$
3. $x^2 - 5x = 0.$
4. $8x^2 - 2x = 0.$
5. $4x^2 - 16 = 0.$
6. $3x^2 - 27 = 0.$
7. $7x^2 + 21x = 0.$
8. $11x^2 - 44x = 0.$
9. $5x^2 + 40x = 0.$
10. $\frac{2x^2}{3} + \frac{3x}{2} = 0.$
11. $\frac{x^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0.$
12. $7x = 21x^2.$
13. $3x^2 = 27.$
14. $\frac{x^2}{2} = \frac{a^4}{3}.$
15. $.001x^2 - 10 = 0.$
16. $x^2 - a^2 = 0.$
17. $4x^2 = a^4.$
18. $9 = 3(x^2 - 1).$
19. $bx^2 + a^2b = ax^2 + ab^2.$
20. $x^2 - 16x = 0.$
21. $4ax^2 - bx = 0.$
22. $(a + b)x^2 = (a^2 - b^2)x.$
23. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2x^2}{c^2} = 0.$
24. $\frac{4}{x - 3} - \frac{4}{x + 3} = \frac{1}{3}.$
25. $9x^2 + 26 = 3x^2 + 80.$

26. $3(x+1)-x(x-1)=4x.$

27. $(2x-3)(x+7)+(2x+3)(x-7)=58.$

28. $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=\frac{x}{12}+\frac{12}{x}.$

29. $\frac{7}{3x^2}-\frac{11}{9x^2}=\frac{5}{8}.$

30. $\frac{3x^3-2}{5}-\frac{5x^2+3}{10}-\frac{4x^3-4}{25}=0.$

31. $\frac{2x^3+4}{5}-\frac{3x^2-7}{3}=\frac{11}{15}.$

32. $\frac{9x^3-2}{6}=\frac{3x^2}{2}-\frac{6x^2+1}{9x^2+7}.$

II. RESOLUCION DE LA ECUACION COMPLETA

342. 1er Procedimiento: por tabulación. Sea la ecuación

$$x^2-4x+3=0.$$

Tabulando, se obtiene:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y=x^2-4x+3$	8	3	0	-1	0	3	8
Puntos	A	B	C	D	E	F	G

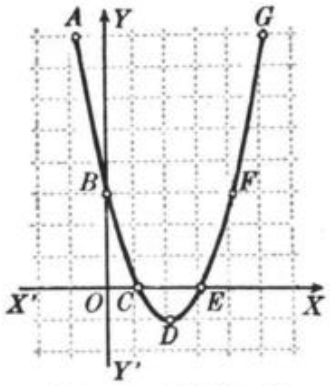


Fig. 46. — Gráfica de x^2-4x+3.

Los valores de x que satisfacen la ecuación son 1 y 3; por tanto, las raíces de la ecuación propuesta, o *ceros* del trinomio x^2-4x+3, son:

$$x_1=1, \quad x_2=3.$$

Si se representan gráficamente los puntos A, B, C, D, E, F, y G, y se unen consecutivamente, se obtiene la *curva* representada en la fig. 46.

Notas. — 1ª Para el trazo de la figura, recuérdese que sólo una ecuación algebraica de primer grado con una o dos incógnitas tiene por gráfica una *recta*.

2ª La curva que representa un trinomio de segundo grado, se llama *parábola*.

343. 2º Procedimiento: **por factorización.**

1º **Sea resolver la ecuación**

$$x^2-5x+6=0.$$

Factorícese el trinomio x^2-5x+6 en el producto de dos factores binomios (ver Nº 138):

$$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)=0.$$

Para que este producto se anule es necesario y basta que se anule uno de los factores.

Si $x-3=0$, se obtiene: $x=3$;

si $x-2=0$, se obtiene: $x=2$.

Las raíces de la ecuación son, pues:

$$x_1=3; \quad x_2=2.$$

COMPROBACIÓN: $3^2-5\times 3+6=0$;

$2^2-5\times 2+6=0.$

2º **Sea resolver la ecuación**

$$5x^2+4x=12.$$

Pásese 12 al primer miembro:

$$5x^2+4x-12=0.$$

Factorícese el trinomio $5x^2+4x-12$ en el producto de dos factores bimonios (ver Nº 142):

$$\begin{aligned}5x^2+4x-12&=5x^2+10x-6x-12=0\\&=5x(x+2)-6(x+2)=0\\&=(x+2)(5x-6)=0.\end{aligned}$$

Este producto se anula si $x+2=0$, o sea, $x=-2$;

y también para $5x-6=0$, o sea, $x=\frac{6}{5}$.

Las raíces son, pues: $x_1=-2$; $x_2=\frac{6}{5}$.

COMPROBACIÓN:

$$5(-2)^2+4(-2)=20-8=12;$$

$$5\left(\tfrac{6}{5}\right)^2+4\times\tfrac{6}{5}=\tfrac{36}{5}+\tfrac{24}{5}=12.$$

EJERCICIO 60

1. Resuélvase gráficamente la ecuación $x^2 - 4 = 0$, comenzando la tabulación por $x = -3$, hasta $x = 3$, y véase cómo la curva corta en dos puntos al eje de las equis.

2. Resuélvase gráficamente la ecuación $x^2 + 1 = 0$, comenzando a tabular desde $x = -3$, hasta $x = 3$, y véase cómo la curva no corta al eje de las equis.

¿Cómo se explica que no haya valor real de x que satisfaga la ecuación?

3. Resuélvase gráficamente la ecuación $x^3 - 2x = 0$, comenzando la tabulación por $x = -2$, hasta $x = 4$. Véase cómo la curva representativa pasa por el origen y por el punto de abscisa 2.

Resolver, tabulando, las ecuaciones siguientes:

4. $x^3 - 5x + 6 = 0$. (Comiéncese con $x = -1$, hasta $x = 5$).

5. $x^3 + 4x + 3 = 0$. (Comiéncese con $x = -4$, hasta $x = 3$).

6. $x^3 - 6x + 8 = 0$. (Desde $x = 0$, hasta $x = 7$).

7. $x^3 - 2x - 3 = 0$. (Desde $x = -3$, hasta $x = 5$).

8. $x^3 - 3x - 10 = 0$. (Desde $x = -4$, hasta $x = 7$).

Resolver las siguientes ecuaciones por medio de la factorización en el producto de factores binomios.

9. $x^2 + 6x - 7 = 0$.

10. $x^2 - 4x - 32 = 0$.

11. $x^2 + 11x = -18$.

12. $x^2 - 13x = -30$.

13. $x^2 + x - 30 = 0$.

14. $x^2 + 2x - 8 = 0$.

15. $x^2 + 7x = 18$.

16. $x^2 - 8x + 12 = 0$.

17 $4x^2 - 3x = 7$.

18. $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

19. $2x^2 + 9x = 5$.

20 $5x^2 + 8 = 22x$.

21. $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

22. $7x^2 + 26x = 8$.

RESOLUCION DE LA ECUACION COMPLETA
(Continuación).

344. 3er Procedimiento: completando el cuadrado. RESOLUCIÓN GEOMÉTRICA O GRÁFICA. Los algebristas antiguos resolvían las cuadráticas por procedimientos fundamentalmente geométricos, como el que consiste en completar un cuadrado, según se ilustra con el ejemplo siguiente:

Sea resolver la ecuación $x^2 + 6x = 55$.

Trácese un cuadrado cualquiera $ABCD$, cuyo lado se supone igual a x (fig. 47).

Colóquense, apoyados en AD y AB, dos rectángulos de bases iguales a 3 unidades arbitrarias (3 = mitad de 6, coeficiente de x).

Si a la figura que resulta se agrega el cuadrado $AEFG$, se completa el cuadrado total, FC, cuya superficie es:

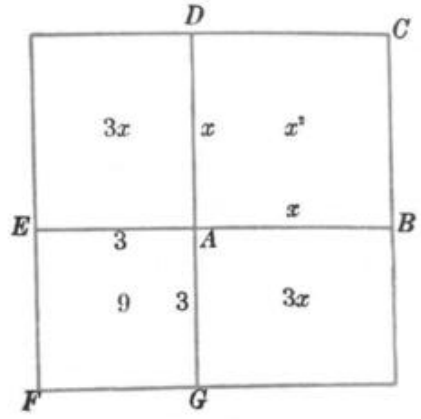


Fig. 47.

$$x^2 + 6x + 9 = 55 + 9 = 64.$$

Por tanto: $GD = \sqrt{64} = 8$.

De donde: $AD = 8 - 3 = 5 = x$.

El procedimiento anterior puede condensarse así:

$$x^2 + 6x = 55$$
$$x^2 + 6x + 9 = 55 + 9$$
$$(x + 3)^2 = 64$$
$$x + 3 = 8$$
$$x = 5.$$

Notas. 1ª Este procedimiento sólo proporciona la raíz positiva.

2ª Para completar el cuadrado, se ha agregado a cada miembro el cuadrado de la mitad del coeficiente del término medio.

RESOLUCIÓN ALGEBRAICA. 1º El primer coeficiente es 1, y el segundo es par.

Sea resolver la ecuación $x^2 - 8x + 12 = 0$.

Pásese el término conocido al segundo miembro:

$$x^2 - 8x = -12.$$

Agréguese el cuadrado de la mitad del coeficiente medio a cada miembro para completar el cuadrado perfecto en el primero:

$$x^2 - 8x + 16 = -12 + 16 = 4,$$

o sea: $(x - 4)^2 = 4$.

Extráigase la raíz cuadrada:

$$x - 4 = \pm 2.$$

Por tanto: $x = 4 \pm 2$; $x_1 = 6$; $x_2 = 2$.

2º El primer coeficiente es 1, y el segundo es impar.

Sea resolver la ecuación $x^2 + 11x - 60 = 0$.

Repitiendo las mismas transformaciones que en el caso anterior, se tiene:

$$x^2 + 11x = 60$$

$$x^2 + 11x + \left(\frac{11}{2}\right)^2 = 60 + \left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 11x + \frac{121}{4} = 60 + \frac{121}{4} = \frac{361}{4}$$

$$\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 = \left(\frac{19}{2}\right)^2$$

$$x + \frac{11}{2} = \pm \frac{19}{2}$$

$$x = -\frac{11}{2} \pm \frac{19}{2}.$$

$$x_1 = -\frac{11}{2} + \frac{19}{2} = 4; \quad x_2 = -\frac{11}{2} - \frac{19}{2} = -15.$$

3º El primer coeficiente es diferente de 1.

Sea resolver la ecuación $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

Se dividen todos los términos entre el primer coeficiente, para reducir este caso a los anteriores, y luego se procede en la misma forma, o sea:

$$x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x = 1$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$x - \frac{3}{4} = \pm \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}.$$

$$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2; \quad x_2 = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{1}{2}.$$

EJERCICIO 61

Resolver, completando el trinomio cuadrado perfecto.

1. $x^2 + 4x - 21 = 0$.
2. $y^2 + 6y + 5 = 0$.
3. $x^2 + 10x - 11 = 0$.
4. $x^2 + 2x - 15 = 0$.
5. $x^2 - 7x + 12 = 0$.
6. $x^2 + 7x + 12 = 0$.
7. $x^2 - 3x = 18$.
8. $x^2 + 3x = 18$.
9. $x^2 + 5x + 6 = 0$.
10. $x^2 - 9x + 20 = 0$.
11. $x^2 - x = 20$.
12. $5x^2 + 500 = 100x$.
13. $8x^2 = 6x - 1$.
14. $2x^2 = 5x - 2$.
15. $9x^2 - 3x = 2$.
16. $3x^2 - 2x - 7 = 0$.
17. $5x^2 - 2x - 1 = 0$.
18. $3x^2 - 5x - 8 = 0$.

RESOLUCION DE LA ECUACION COMPLETA

(Continuación).

345. Fórmula general. Sea resolver la ecuación literal

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Efectúense las mismas operaciones que en el caso anterior, es decir:

Divídase cada término entre a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Pásese $\frac{c}{a}$ al segundo miembro:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Agréguese a cada miembro $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Extráigase la raíz cuadrada de cada miembro y despéjese x:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Las dos raíces combinadas, se escriben:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Este resultado es la *fórmula general* de resolución de las cuadráticas. Por ella se ve que:

En una ecuación ordenada descendentemente de segundo grado el valor de la incógnita es igual al coeficiente del segundo término con signo cambiado, más o menos la raíz cuadrada del cuadrado del coeficiente del segundo término, menos el cuádruplo del producto de los coeficientes extremos, todo dividido entre el duplo del primer coeficiente.

346. **Aplicaciones.** Resolver:

1º $x^2-9x+20=0$.

En esta ecuación los coeficientes son:

$$a=1,\quad b=-9,\quad c=20.$$

Sustitúyanse en la fórmula general las literales por sus valores:

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81-4\times1\times20}}{2\times1}=\frac{9\pm1}{2}.$$

Las raíces son: $x_1=\frac{9+1}{2}=5$; $x_2=\frac{9-1}{2}=4$.

COMPROBACIÓN: $5^2-9\times5+20=0$; $4^2-9\times4+20=0$.

2º $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{5}{12}$.

Multiplíquense ambos miembros por $12(x^2-1)$ y redúzcase:

$$12x+12+12x-12=5x^2-5$$

$$5x^2-24x-5=0.$$

En esta ecuación los coeficientes son: $a=5$, $b=-24$, $c=-5$.

Sustitúyanse en la fórmula general las literales por sus valores:

$$x=\frac{24\pm\sqrt{24^2-4\times5(-5)}}{2\times5}=\frac{24\pm\sqrt{576+100}}{10}=\frac{24\pm26}{10}.$$

Las raíces son: $x_1=\frac{24+26}{10}=5$; $x_2=\frac{24-26}{10}=-\frac{1}{5}$.

COMPROBACIÓN: $\frac{1}{5-1}+\frac{1}{5+1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$;

$$\frac{1}{-\frac{1}{5}-1}+\frac{1}{-\frac{1}{5}+1}=\frac{1}{-\frac{6}{5}}+\frac{1}{\frac{4}{5}}=-\frac{5}{6}+\frac{5}{4}=\frac{5}{12}.$$

3º $mnx^2-(m+n)x+1=0$.

Los coeficientes son:

$$a=mn,\quad b=-(m+n),\quad c=1.$$

Sustitúyase en la fórmula general:

$$x=\frac{(m+n)\pm\sqrt{(m+n)^2-4mn}}{2mn}=\frac{(m+n)\pm\sqrt{m^2+2mn+n^2-4mn}}{2mn}$$

$$=\frac{(m+n)\pm\sqrt{(m-n)^2}}{2mn}=\frac{(m+n)\pm(m-n)}{2mn}.$$

Las raíces de la ecuación son, pues:

$$x_1=\frac{m+n+m-n}{2mn}=\frac{1}{n};\quad x_2=\frac{m+n-m+n}{2mn}=\frac{1}{m}.$$

COMPROBACIÓN: $mn\times\frac{1}{n^2}-(m+n)\frac{1}{n}+1=\frac{m}{n}-\frac{m}{n}-1+1=0$;

$$mn\times\frac{1}{m^2}-(m+n)\frac{1}{m}+1=\frac{n}{m}-1-\frac{n}{m}+1=0.$$

EJERCICIO 62

Resolver las siguientes ecuaciones, aplicando la fórmula general de resolución:

1. $x^2-8x+15=0$.
2. $y^2-2y-15=0$.
3. $x^2=10x-21$.
4. $z^2+25z+150=0$.
5. $x^2-25x+150=0$.
6. $1-6t=-8t^2$.
7. $5x+1=2x^2+3$.
8. $x^2+10-5x=-40+10x$.
9. $5y-12=y^2-4y+8$.
10. $21x-100=x^2+21-x$.
11. $6z^2=5z-1$.
12. $12-10v=5v-13-2v^2$.
13. $7x^2+10=101x-3x^2$.
14. $2y^2-1=1-y+y^2$.

15. $x^2 - 50 = 49 - 2x$.
16. $u^2 - 8u - (8u + 17) = 0$.
17. $10x^2 - 15 = 3x - (6x^2 - 5x)$.
18. $10p^2 + 10 = 101p$.
19. $11u(11u - 4) = 5$.
20. $2x^2 - 1 = 3x - 2x^2$.
21. $5t^2 + 3t - 2 = 0$.
22. $x^2 + 5x = 6$.
23. $3y^2 + 2y = 4 - 3y - 3y^2$.
24. $v(v + 2) = 15$.
25. $x^2 - 18x = -25x + 18$.
26. $z - 6 + 2z^2 = 4 - z^2 + 8z$.
27. $(3x - 2)^2 - 1 = -(x - 1)^2$.
28. $(u - 3)^2 - 2(u^2 - 9) = 0$.
29. $(w - 1)(w - 2) - 12 = 0$.
30. $(y - 7)(y + 4) - 5.75 = 0$.
31. $(t - 7)(t + 4) + (t - 4)(t - 3) = 84$.
32. $x(x - 8) + 12 = 0$.
33. $3(z - 5)(z - 2) = 7(z - 4)(z - 6) - 48$.
34. $2 + \frac{12}{x-3} = x + 3$.
35. $\frac{2}{x-1} - \frac{5}{2} = \frac{1-x}{2}$.
36. $\frac{6x+33}{x} = 15 - (x - 5)$.
37. $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{13}{6}$.
38. $\frac{y}{y+1} + \frac{y}{y+4} = 1$.
39. $\frac{x^2-24}{5} \times 4 + x^2 - 37 = 32$.
40. $w = 8 - \frac{12}{w}$.
41. $\frac{x-2}{9} = \frac{1}{x+2}$.
42. $2 = \frac{2x-20}{2x-8} - x$.
43. $2x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{1}{50} = 0$.
44. $\frac{3(2x-1)}{2x+1} - \frac{2(2x+1)}{2x-1} - 5 = 0$.
45. $\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{2}{2}-1} - \frac{\frac{x-3}{x}}{\frac{2}{2}-2} + \frac{1}{6} = 0$.
46. $\frac{9x^2}{5} - \frac{7x}{3} + 2 = 2x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$.
47. $\frac{4}{7(x^2-1)} + \frac{1}{9(x+1)} = \frac{1}{63}$.
48. $\frac{x+6}{x-6} + \frac{x-6}{x+6} = \frac{17}{4}$.
49. $\frac{x-5}{2} = \frac{5}{x-2}$.

50. $\frac{x^2-36}{8} + \frac{x^2-64}{6} = 14$.
51. $(3y + 2)(2y + 3) = (y - 3)(2y - 4)$.
52. $(2x + 1)^2 - (3x - 2)^2 - (x + 1)^2 = 0$.
53. $4(z-1)(2z-1) + 4(2z-1)(3z-1) + 4(3z-1)(4z-1) = 53z^2$.

Resolver las ecuaciones literales siguientes:

54. $x^2 - 2ax + a^2 = 0$.
55. $x^2 - 2(a + b)x + 4ab = 0$.
56. $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$.
57. $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a = 0$.
58. $a^2x^2 - 2ax - 3 = 0$.
59. $abx^2 - (a + b)x + 1 = 0$.
60. $abx^2 - (a - b)x - 1 = 0$.
61. $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$.
62. $x^2 - 9ax - 10a^2 = 0$.
63. $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$.
64. $bx^2 - (ab^2 + a)x + a^2b = 0$.
65. $x^2 - 2(a + b)x + (a + b)^2 = 0$.
66. $m^2y^2 - 5my + 4 = 0$.
67. $(a - b)x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0$.

III. CASOS PARTICULARES

347. Fórmula simplificada. Cuando el coeficiente medio de la ecuación cuadrática es par, la fórmula general puede simplificarse.

En efecto, siendo b un número par, puede escribirse: $b = 2b'$.

Sustituyendo, se obtiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a}.$$

Poniendo $\sqrt{4} = 2$ como coeficiente del radical y simplificando, resulta:

$$x = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Las raíces son, pues: $\boldsymbol{x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}}$.

Si, además, a es igual a **1**: $\boldsymbol{x = -b' \pm \sqrt{b'^2 - c}}$.

348. **Aplicaciones.** Resolver:

1º $5x^2 - 18x + 9 = 0.$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 45}}{5} = \frac{9 \pm \sqrt{36}}{5} = \frac{9 \pm 6}{5}.$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = \frac{3}{5}.$$

COMPROBACIÓN: $5 \times 3^2 - 18 \times 3 + 9 = 0;$

$$5 \times \frac{9}{25} - 18 \times \frac{3}{5} + 9 = \frac{9}{5} - \frac{54}{5} + \frac{45}{5} = 0.$$

2º $x^2 - 16x - 57 = 0.$

$$x = 8 \pm \sqrt{64 + 57} = 8 \pm \sqrt{121} = 8 \pm 11.$$

$$x_1 = 19; \quad x_2 = -3.$$

COMPROBACIÓN: $19^2 - 16 \times 19 - 57 = 361 - 304 - 57 = 0;$

$$(-3)^2 - 16(-3) - 57 = 9 + 48 - 57 = 0.$$

349. **Raíces irracionales y raíces complejas.** Hay cuadráticas cuyas raíces son *irracionales* y otras que tienen raíces *complejas.*

Para resolver estas ecuaciones no hay que seguir ningún procedimiento especial: basta aplicar la *fórmula general,* como puede verse por los ejemplos siguientes.

350. **Aplicaciones.** Resolver:

1º $x^2 - 4x - 9 = 0.$

$$x = 2 \pm \sqrt{4 + 9} = 2 \pm \sqrt{13}.$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{13}; \quad x_2 = 2 - \sqrt{13}.$$

Las raíces son *irracionales*

COMPROBACIÓN:

$$(2+\sqrt{13})^2 - 4(2+\sqrt{13}) - 9 = 4 + 4\sqrt{13} + 13 - 8 - 4\sqrt{13} - 9 = 0;$$

$$(2-\sqrt{13})^2 - 4(2-\sqrt{13}) - 9 = 4 - 4\sqrt{13} + 13 - 8 + 4\sqrt{13} - 9 = 0.$$

2º Resolver la ecuación $x^2 - 10x + 29 = 0.$

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 29} = 5 \pm \sqrt{-4} = 5 \pm 2i.$$

$$x_1 = 5 + 2i; \quad x_2 = 5 - 2i.$$

Las raíces son *complejas.*

COMPROBACIÓN:

$$(5+2i)^2 - 10(5+2i) + 29 = 25 + 20i - 4 - 50 - 20i + 29 = 0;$$

$$(5-2i)^2 - 10(5-2i) + 29 = 25 - 20i - 4 - 50 + 20i + 29 = 0.$$

Nota. — Por estos ejemplos se ve que las raíces irracionales y las complejas en la cuadrática, van siempre apareadas, o hay dos o no hay ninguna.

351. **Ecuación con el primer coeficiente negativo.** Sea, por ej., resolver la ecuación $-x^2 + 8x - 15 = 0.$

Aplicando la fórmula general se obtiene:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - (-1) \times (-15)}}{-1} = \frac{-4 \pm 1}{-1}.$$

$$x_1 = 5; \quad x_2 = 3.$$

COMPROBACIÓN:

$$-5^2 + 8 \times 5 - 15 = 0; \quad -3^2 + 8 \times 3 - 15 = 0.$$

Para resolver la ecuación anterior y, en general, toda ecuación cuadrática cuyo primer coeficiente sea negativo, pueden también multiplicarse primero ambos miembros por (-1), y aplicar luego uno de los procedimientos ya expuestos.

Así, multiplicando por (-1) ambos miembros de la ecuación ya considerada, se obtiene:

$$x^2 - 8x + 15 = 0;$$

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1.$$

$$x_1 = 5; \quad x_2 = 3.$$

Resultado idéntico al primeramente obtenido, pero en forma más sencilla.

352. **Observación.** La resolución por tabulación de la ecuación propuesta y de la obtenida al multiplicar por (-1), da:

x	1	2	3	4	5	6	7
$y = -x^2 + 8x - 15$	-8	-3	0	1	0	-3	-8
Puntos	A	B	C	D	E	F	G

x	1	2	3	4	5	6	7
$y = x^2 - 8x + 15$	8	3	0	-1	0	3	8
Puntos	A'	B'	C	D'	E	F'	G'

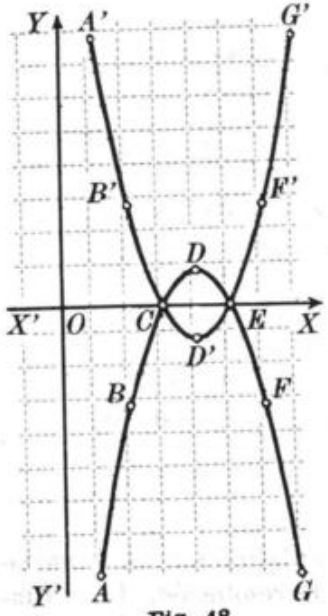


Fig. 48.

Nótese, en las dos tabulaciones, los mismos pares de valores, $C(3,0)$ y $E(5,0)$: *las dos ecuaciones tienen las mismas raíces.*

Los valores de y del primer cuadro son *simétricos* de los correspondientes del segundo.

En la representación gráfica (fig. 48), se ven dos *parábolas* que cortan el eje de las equis en los mismos puntos, C y E, y están simétricamente dispuestas con respecto al eje $X'X$.

La multiplicación por (-1) dió como resultado, en la gráfica, imprimir a la parábola $y = -x^2 + 8x - 15$ una rotación de 180°, alrededor del eje $X'X$, en el cual los puntos C y E permanecen fijos.

EJERCICIO 63

Resolver, aplicando la fórmula simplificada.

1. $x^2 + 8x + 15 = 0$.
2. $x^2 + 2x - 15 = 0$.
3. $x^2 - 8x - 240 = 0$.
4. $x^2 - 32x + 240 = 0$.
5. $x^2 + 60x = 160x - 2\,500$.
6. $4x^2 + 6x = -1 - 4x^2$.
7. $2x^2 + 80 = x^2 + 20x - 20$.
8. $100x^2 - 20x + 1 = 0$.
9. $3x^2 - 18x + 24 = 0$.
10. $-8x^2 + 20x = 12$.
11. $16x^2 - 104x + 25 = 0$.
12. $24x + 35 = -2x^2 - 35$.
13. $8x^2 + 1 = -6x$.
14. $-6x^2 + 2x = -4$.
15. $35 - 4x = 4x^2$.
16. $-16x^2 - 60x = -100x + 9$.
17. $20x^2 - 12x + 3 = 8x - 1 - 5x^2$.
18. $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} = \frac{35}{6}$.

Resolver las siguientes ecuaciones de raíces irracionales.

19. $x^2 - 3x - 21 = 0$.
20. $x^2 - 4x - 1 = 0$.
21. $x^2 - 6x - 6 = 0$.
22. $x^2 + 14x + 46 = 0$.

23. $x^2 - 22x - 110 = 0$.
24. $x^2 + 18x + 55 = 0$.
25. $x^2 - 10x + 13 = 0$.
26. $x^2 + 20x + 55 = 0$.
27. $x^2 - 13x + 8 = 0$.
28. $x^2 - 17x + 56 = 0$.
29. $5x^2 - 14x + 6 = 0$.
30. $6x^2 + 17x + 9 = 0$.

Resolver las siguientes ecuaciones de raíces complejas.

31. $x^2 - 5x + 7 = 0$.
32. $x^2 + 13x + 45 = 0$.
33. $x^2 - 9x + 27 = 0$.
34. $2x^2 - 9x + 11 = 0$.
35. $3x^2 + 12x + 21 = 0$.
36. $7x^2 + 12x + 6 = 0$.
37. $\frac{x-10}{x+10} = \frac{6+x}{2-x}$.
38. $x^2 + 2x + 3 = 0$.
39. $3x^2 - 6x + 9 = 0$.

IV. ECUACIONES IRRACIONALES

353. Resolución. En el Nº 332 se definieron las *ecuaciones irracionales*, y se expuso su modo de resolución. Los ejemplos allí propuestos sólo dieron lugar a una ecuación de *primer grado.*

Hay casos en que al resolver una ecuación irracional se llega a una ecuación de *segundo grado* con una incógnita, como puede verse por los ejemplos siguientes:

1º Sea resolver la ecuación $x - 5 + 2\sqrt{x-5} = 8$.

Despéjese el radical: $2\sqrt{x-5} = 8 - x + 5 = 13 - x$.

Elévese al cuadrado: $4x - 20 = 169 - 26x + x^2$.

Redúzcase: $x^2 - 30x + 189 = 0$.

Resuélvase: $x = 15 \pm \sqrt{225 - 189} = 15 \pm 6$.

$x_1 = 21$; $x_2 = 9$.

COMPROBACIÓN:

$$21 - 5 + 2\sqrt{21-5} \neq 8; \quad 9 - 5 + 2\sqrt{9-5} = 8.$$

INTERPRETACIÓN: Teniendo en cuenta el doble signo de $\sqrt{x-5}$, se ve que la raíz 9 satisface la ecuación si se toma el signo $+$. El otro valor, 21, satisface igualmente si se toma el signo $-$, pues se tiene:

$$21 - 5 - 2\sqrt{21-5} = 8.$$

Por tanto: 9 y 21 son raíces, respectivamente, de:

$$x-5+2\sqrt{x-5}=8 \quad \text{y} \quad x-5-2\sqrt{x-5}=8,$$

en que sólo se toma el valor aritmético del radical.

2º Resolver la ecuación: $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-3}+1=0.$

Despéjese un radical: $\sqrt{x+2}=2\sqrt{x-3}-1.$

Elévese el cuadrado: $x+2=4x-12-4\sqrt{x-3}+1.$

Redúzcase: $3x-13=4\sqrt{x-3}.$

Elévese al cuadrado: $9x^2-78x+169=16x-48.$

Redúzcase: $9x^2-94x+217=0.$

Resuélvase: $x=\frac{47\pm\sqrt{2\,209-1\,953}}{9}=\frac{47\pm16}{9}.$

$$x_1=7; \quad x_2=\tfrac{31}{9}.$$

COMPROBACIÓN: $\sqrt{7+2}-2\sqrt{7-3}+1=0;$

$$\sqrt{2+\tfrac{31}{9}}-2\sqrt{\tfrac{31}{9}-3}+1=\sqrt{\tfrac{49}{9}}-2\sqrt{\tfrac{4}{9}}+1=0.$$

Nota. Por estos ejemplos se ve que al resolver una ecuación irracional se pueden obtener dos raíces verdaderas, o una sola raíz verdadera con una inadmisible, pero tal que resultaría verdadera si se cambiara el signo del radical.

EJERCICIO 64

Resolver las siguientes ecuaciones irracionales, y hacer la comprobación para determinar si admiten dos raíces o una sola.

1. $\sqrt{x^2+9}=5.$
2. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}=2.$
3. $\sqrt{x+16}=\sqrt{3x+9}-1.$
4. $x+\sqrt{x}-20=0.$
5. $4x-3\sqrt{x}-27=0.$
6. $\sqrt{x+2}-\sqrt{16-x}=0.$
7. $\sqrt{x}+2=\sqrt{x+12}.$
8. $\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+4}.$
9. $\sqrt{2x-6}=\sqrt{5x}-3.$
10. $\sqrt{x+10}-\sqrt{x}-2=0.$
11. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}=1.$
12. $\sqrt{-2+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{x+4}}}}=1.$

V. NATURALEZA DE LAS RAICES DE LAS CUADRATICAS

354. Discriminante. Según se ha visto, las raíces de la ecuación general $ax^2+bx+c=0$, son

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

El radicando, o sea, el binomio b^2-4ac, *se llama* **discriminante**, *o binomio característico de la ecuación de segundo grado.*

La naturaleza de las raíces depende de dicho binomio, y basta una simple inspección de él para conocer cómo son dichas raíces, sin necesidad de resolver la ecuación.

1º Si $b^2-4ac>0$, y además cuadrado perfecto, $\sqrt{b^2-4ac}$ es *racional: las raíces son reales, desiguales y racionales.*

2º Si $b^2-4ac>0$, sin ser cuadrado perfecto, $\sqrt{b^2-4ac}$ es *irracional: las raíces son reales, desiguales e irracionales.*

3º Si $b^2-4ac=0$, *las raíces son reales e iguales,* o sea, *hay una raíz doble*; el valor de cada raíz es $-\frac{b}{2a}$.

4º Si $b^2-4ac<0$, $\sqrt{b^2-4ac}$ *es imaginario: las raíces son complejas.*

355. Aplicaciones. Decir, sin resolver, la naturaleza de las raíces de las ecuaciones siguientes:

1º $x^2-4x+3=0.$
2º $x^2-4x+2=0.$
3º $x^2-4x+4=0.$
4º $x^2-4x+5=0.$

En la primera, $b^2-4ac=16-12=4$; siendo el valor del binomio positivo y cuadrado perfecto, las raíces son reales, desiguales y racionales.

En la segunda, $b^2-4ac=16-8=8$; siendo el valor del binomio positivo sin ser cuadrado perfecto, las raíces son reales, desiguales e irracionales.

En la tercera, $b^2-4ac=0$, hay una raíz doble, o dos raíces reales e iguales, y su valor es $\frac{4}{2}=2$.

En la cuarta, $b^2-4ac=16-20=-4$; siendo negativo el valor del binomio, las raíces son complejas.

Obsérvense, en las figuras 49, 50 y 51, las gráficas correspondientes a las ecuaciones 1ª, 3ª y 4ª.

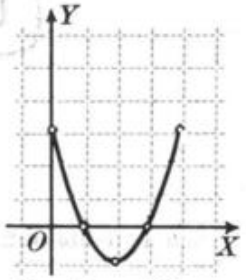


Fig. 49. — Raíces reales, desiguales y racionales.

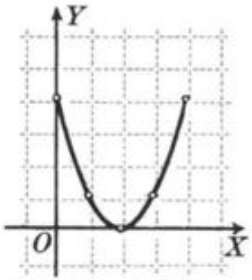


Fig. 50. — Raíces reales e iguales o una raíz doble.

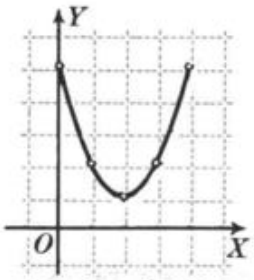


Fig. 51. — Raíces complejas.

Si $b^2 - 4ac > 0$, la parábola corta al eje $X'X$ en dos puntos.

Si $b^2 - 4ac = 0$, la parábola es tangente al eje $X'X$.

Si $b^2 - 4ac < 0$, la parábola no toca al eje $X'X$.

EJERCICIO 65

Averiguar, por el solo examen del discriminante, la naturaleza de las raíces en las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 + 2x - 3 = 0$.
2. $x^2 - 6x + 4 = 0$.
3. $x^2 - 5x + 8 = 0$.
4. $x^2 + 2x + 1 = 0$.
5. $2y^2 - 5y + 7 = 0$.
6. $3r^2 - 8r + 2 = 0$.
7. $2n^2 + 5n - 3 = 0$.
8. $4x^2 + 4x + 1 = 0$.
9. $z^2 + 8z + 16 = 0$.
10. $y^2 - 8y + 15 = 0$.
11. $x^2 - 12x + 25 = 0$.
12. $4r^2 - 3r + 5 = 0$.

13. ¿Cómo son las raíces de la ecuación $9x^2 - 24x + 16 = 0$? ¿Qué sucede si el término independiente se sustituye por un número mayor que él? ¿Y qué, si se sustituye por otro menor que él?

14. ¿Qué raíces tiene la ecuación $3x^2 - 9x + 8 = 0$? ¿Qué cambio de signo basta hacer en ella para obtener otra de raíces reales?

15. Si el primer coeficiente de una ecuación de segundo grado es positivo y el término independiente es negativo, la ecuación no tiene raíces complejas. ¿Es cierta esta afirmación?

5

PROPIEDADES DE LAS RAICES EN LAS CUADRATICAS

I. RELACIONES ENTRE LAS RAICES Y LOS COEFICIENTES

356. Suma y producto de las raíces. Sea la ecuación general y sus raíces:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Súmese miembro a miembro:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - b}{2a} = -\frac{2b}{2a},$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}. \qquad (1)$$

Multiplíquese miembro a miembro:

$$x_1 x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2}.$$

El numerador es el producto de dos binomios conjugados; por tanto:

$$x_1 x_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \qquad (2)$$

Por (1) y (2) se ve que, en toda ecuación de segundo grado:

1º *La suma de las raíces es igual al coeficiente medio, tomado con signo contrario, y dividido entre el primer coeficiente.*

2º *El producto de las raíces es igual al término independiente dividido entre el primer coeficiente.*

Notas. — Si el primer coeficiente es 1:

1ª La suma de las raíces es igual al coeficiente medio, tomado con signo contrario.

2ª El producto de las raíces es igual al término independiente.

357. Aplicaciones. Hallar, sin resolver, la suma y el producto de las raíces de las ecuaciones

$$4x^2 - 7x + 3 = 0,$$
$$x^2 + 11x + 28 = 0.$$

Por las relaciones (1) y (2) se tiene:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{7}{4} \quad \text{y} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}.$$
$$x_1 + x_2 = -b = -11 \quad \text{y} \quad x_1 x_2 = c = 28.$$

2º Hallar, sin resolver, los signos de las raíces de las ecuaciones

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$
$$x^2 - x - 12 = 0.$$

En la primera ecuación, el producto de las raíces es 4; como es positivo, las dos son de mismo signo; siendo también positiva la suma de las raíces, que es 5, las dos son positivas.

En la segunda, el producto es -12; las dos son, por tanto, de signos contrarios; siendo positiva su suma, resulta que la mayor en valor absoluto es positiva.

EJERCICIO 66

Hallar, sin resolver, la suma y el producto de las raíces en las ecuaciones siguientes:

1. $x^2 - 9x + 8 = 0.$
2. $x^2 - 9x + 20 = 0.$
3. $x^2 - x - 1 = 0.$
4. $x^2 - 4x + 5 = 0.$
5. $18a^2x^2 + 9a^2x + 1 = 0.$
6. $11x^2 - 121x = 0.$
7. $x^2 + 16x + 64 = 0.$
8. $7x^2 + 2x + 11 = 0.$
9. $x^2 - 4x + 4 = 0.$
10. $64x^2 - 1 = 10.$
11. $20x^2 - 401x + 20 = 0.$
12. $x^2 - 11ax + 30a^2 = 0.$

Decir, sin resolver las ecuaciones siguientes, los signos de las raíces:

13. $x^2 - 23x + 60 = 0.$
14. $x^2 - 17x - 60 = 0.$
15. $x^2 + 23x + 60 = 0.$
16. $x^2 + 17x - 60 = 0.$
17. $x^2 - 30x + 200 = 0.$
18. $x^2 - .3x + .04 = 0.$
19. $x^2 + 100x + 900 = 0.$
20. $x^2 + (b^2 - a^2)x - a^2b^2 = 0.$

II. APLICACIONES DE LAS PROPIEDADES DE LAS RAICES

358. Factorización de un trinomio cuadrático. Sea el trinomio

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Póngase a en factor común:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Sustitúyase $\frac{b}{a}$ por $-(x_1 + x_2)$ y $\frac{c}{a}$ por x_1x_2:

$$y = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = a(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2).$$

Póngase x en factor en los dos primeros términos, x_2 en los dos últimos, y $x - x_1$ en los dos términos resultantes:

$$y = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)],$$
$$y = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Por donde se ve que: *El trinomio* $ax^2 + bx + c$ *puede descomponerse en el producto de tres factores, que son: el coeficiente* a, *y cada una de las diferencias que se obtienen restando de* x *las raíces de la ecuación que resulta al igualar a cero el trinomio propuesto.*

359. Aplicaciones. 1º Factorícense los trinomios

$$x^2 - 10x + 21,$$
$$32x^2 - 4x - 1.$$

Las raíces de las ecuaciones que se forman al igualar a cero cada uno de los trinomios son, respectivamente:

$$x_1 = 3 \quad \text{y} \quad x_2 = 7.$$
$$x_1 = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{1}{8}.$$

Se tiene, por tanto:

$$x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 7).$$
$$32x^2 - 4x - 1 = 32\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{8}\right).$$

2º Simplificar la fracción

$$f = \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 12x + 32}.$$

Por lo visto anteriormente, se puede escribir:

$$x^2 - 9x + 20 = (x-4)(x-5),$$
$$x^2 - 12x + 32 = (x-4)(x-8).$$

Resulta, por tanto:

$$f = \frac{(x-4)(x-5)}{(x-4)(x-8)} = \frac{x-5}{x-8}.$$

EJERCICIO 67

Factorícense las expresiones siguientes:

1. $x^2 - 7x + 12$.
2. $x^2 - 2x - 120$.
3. $x^2 + 10x + 9$.
4. $3x^2 - 10x + 3$.
5. $x^2 - 50x - 51$.
6. $2x^2 - 31x + 110$.
7. $x^2 - 1$.
8. $x^2 - 16x$.
9. $x^2 - (a+1)x + a$.
10. $10x^2 - 101x + 10$.

Simplificar las fracciones siguientes:

11. $\frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 11x + 30}$.
12. $\frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 18x + 77}$.
13. $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 6x + 5}$.
14. $\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 13x + 36}$.
15. $\frac{2x^2 - 18}{2x^2 - 7x + 3}$.
16. $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$.
17. $\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 8x + 15}$.
18. $\frac{x^2 + 6x - 27}{x^2 - 9x + 18}$.
19. $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12}$.
20. $\frac{x - 1}{x^2 - 31x + 30}$.
21. $\frac{x^2 + 6x + 9}{3x^2 + 6x - 9}$.
22. $\frac{x^3 + 33x^2 + 230x}{x^4 - 629x^2 + 52\,900}$.
23. $\frac{(x^2 - 3x - 4)(x^2 + 4x - 5)}{(x^2 - 1)(x^2 + x - 20)}$.
24. $\frac{x^2 - 13x + 40}{(x^2 - 9x + 20)(x^2 - 17x + 72)}$.

APLICACIONES DE LAS PROPIEDADES DE LAS RAICES

(Continuación).

360. **Formación de la ecuación de segundo grado.** Dada una ecuación de segundo grado, se pueden hallar sus *raíces*, como se ha explicado en el capítulo precedente.

Inversamente, dados dos números, puede formarse la *ecuación* de segundo grado, cuyas raíces sean esos números dados. Para ello, aplíquense las relaciones que ligan las raíces con los coeficientes de las cuadráticas, conforme se explica a continuación.

Sea formar la ecuación cuyas raíces son 5 y 7.

El primer término de la ecuación es x^2.

El segundo término tiene como coeficiente de x la suma de las raíces tomada con signo contrario, o sea $-(5+7) = -12$; es, por tanto, $-12x$.

El tercer término, o término independiente, es el producto de las raíces, es decir, $5 \times 7 = 35$.

La ecuación pedida es, por consiguiente:

$$x^2 - 12x + 35 = 0.$$

COMPROBACIÓN: $x = 6 \pm \sqrt{36 - 35} = 6 \pm 1$.

$$x_1 = 6 + 1 = 7; \quad x_2 = 6 - 1 = 5.$$

361. **Aplicaciones.** **Formar las ecuaciones cuyas raíces sean, respectivamente:**

$$2, \ \frac{3}{5} \ \text{y} \ \frac{4}{3}, -\frac{5}{7}.$$

1º Cálculo de los coeficientes b y c.

$$b = -\left(2 + \frac{3}{5}\right) = -\frac{13}{5}; \quad c = 2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}.$$

La ecuación es, por tanto: $x^2 - \frac{13}{5}x + \frac{6}{5} = 0$,

o sea, dándole forma entera: $5x^2 - 13x + 6 = 0$.

2º Cálculo de los coeficientes b y c.

$$b = -\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{7}\right) = -\frac{28 - 15}{21} = -\frac{13}{21}; \quad c = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{20}{21}.$$

La ecuación es, por tanto: $x^2 - \frac{13}{21}x - \frac{20}{21} = 0$,

o sea, dándole forma entera: $21x^2 - 13x - 20 = 0$.

362. **Ecuaciones con raíces recíprocas.** Formar una ecuación cuyas raíces sean recíprocas de las raíces de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Sean r_1 y r_2 las raíces de la ecuación pedida.

Se puede escribir: $r_1 = \frac{1}{x_1}$ y $r_2 = \frac{1}{x_2}$.

Suma de las raíces: $r_1 + r_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$.

Producto de las raíces: $r_1 r_2 = \frac{1}{x_1} \times \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2}$.

De las fórmulas: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ y $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$,

se deduce: $r_1 + r_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-b : a}{c : a} = -\frac{ab}{ac} = -\frac{b}{c}$;

$$r_1 r_2 = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{c : a} = \frac{a}{c}.$$

La ecuación pedida es, pues:

$$r^2 + \frac{b}{c} r + \frac{a}{c} = 0; \quad \text{o bien:} \quad cr^2 + br + a = 0.$$

Sustitúyase r por x: $cx^2 + bx + a = 0$.

Por tanto: *Para obtener una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean recíprocas de las raíces de otra ecuación, también de segundo grado, basta invertir en ésta el orden de los coeficientes.*

363. Aplicación. Formar la ecuación cuyas raíces sean recíprocas de las de la ecuación siguiente:

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Invirtiendo el orden de los coeficientes, se tiene:

$$12x^2 - 7x + 1 = 0.$$

COMPROBACIÓN:

Raíces de $x^2 - 7x + 12 = 0$: $x_1 = 3$; $x_2 = 4$.

Raíces de $12x^2 - 7x + 1 = 0$: $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = \frac{1}{4}$.

364. Ecuación cuyas raíces sean las de otra multiplicadas por una constante. Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Se trata de obtener otra ecuación, cuyas raíces sean las de la propuesta, multiplicadas por una constante k.

Llamando r_1 y r_2 las nuevas raíces, se tiene:

$$r_1 = kx_1; \quad r_2 = kx_2.$$

Los coeficientes de la ecuación pedida son:

$$r_1 + r_2 = -(kx_1 + kx_2) = -k(x_1 + x_2) = -k\frac{b}{a};$$

$$r_1 r_2 = kx_1 kx_2 = k^2 x_1 x_2 = k^2 \frac{c}{a}.$$

La ecuación pedida es, por tanto:

$$r^2 + k\frac{b}{a} r + k^2 \frac{c}{a} = 0; \quad \text{o bien:} \quad ar^2 + kbr + k^2 c = 0.$$

Sustituyendo r por x: $ax^2 + kbx + k^2 c = 0$.

Para formar una ecuación cuadrática, cuyas raíces sean las de otra, multiplicadas por una constante k, *multiplíquese el segundo coeficiente por* k, *y el tercero por* k^2.

365. Aplicación. Formar la ecuación cuyas raíces sean las de

$$2x^2 - 19x + 9 = 0 \qquad (1)$$

multiplicadas por 6.

La ecuación pedida es:

$$2x^2 - 6 \times 19x + 6^2 \times 9 = 2x^2 - 114x + 324 = 0. \qquad (2)$$

COMPROBACIÓN:

Raíces de (1): $x = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 72}}{4} = \frac{19 \pm 17}{4}$;

$$x_1 = 9; \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Raíces de (2) $x = \frac{57 \pm \sqrt{3\,249 - 648}}{2} = \frac{57 \pm 51}{2}$;

$$x_1 = 54 = 9 \times 6; \quad x_2 = 3 = \frac{1}{2} \times 6.$$

Nota. Se llegaría al mismo resultado del Nº 362, haciendo la sustitución $x = \frac{1}{z}$, y al del Nº 364, mediante la sustitución $x = \frac{z}{k}$.

EJERCICIO 68

Formar ecuaciones cuadráticas cuyas raíces sean:

1. 3, 5.
2. 10, −1.
3. −40, $\frac{1}{2}$.
4. 4, $-\frac{1}{2}$.
5. $\frac{2}{3}$, −7.
6. $\frac{5}{3}$, 5.
7. $\frac{4}{5}$, $-\frac{5}{7}$.
8. m, $2m$.
9. a, $\frac{1}{a}$.
10. a, $-a$.
11. $a + b$, $a - b$.
12. m^2, n^2.

13. ¿Puede tener dos raíces fraccionarias una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en que a es igual a 2 y los demás coeficientes son enteros?

14. ¿Puede tener dos raíces fraccionarias una ecuación de segundo grado cuyos coeficientes son enteros y el primero es un número primo?

¿Cuál debe ser el valor de b en la ecuación $x^2 - bx + 3\,600 = 0$, para que se tengan los valores siguientes?

15. $x_1 = 20$.
16. $x_1 = 30$.
17. x_1 y x_2 complejas.
18. $x_1 = x_2$.
19. $x_1 = 2x_2$.
20. $x_1 = -x_2$.
21. $x_1 = \frac{1}{x_2}$.
22. $x_1 + x_2 = 100$.
23. $x_1 = \frac{x_2}{2}$.
24. $x_1 = 1$.
25. $x_1 = x_2 + 35$.
26. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$.

¿Cuál debe ser el valor de c en la ecuación $x^2 - 16x + c = 0$, para que se tengan los valores siguientes?

27. $x_1 = x_2$.
28. $x_1 = 7x_2$.
29. $x_1 = \frac{1}{x_2}$.
30. $x_1 - x_2 = 2$.
31. $x_1^2 + x_2^2 = 136$.
32. $x_1^2 - x_2^2 = 160$.
33. $x_1 = 1$.
34. $x_2 = 100$.
35. $x_1 = -\frac{x_2}{2}$.
36. x_1 y x_2 complejas.
37. $x_1 = x_2 + 1$.
38. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 10$.

Formar ecuaciones cuyas raíces sean recíprocas de las raíces de las ecuaciones siguientes, y comprobar:

39. $x^2 - 7x + 10 = 0$.
40. $x^2 - 5x + 6 = 0$.
41. $x^2 - 8x + 15 = 0$.
42. $3x^2 - 2x - 33 = 0$.
43. $4x^2 - 7x + 3 = 0$.
44. $9x^2 - 32x + 15 = 0$.

Formar ecuaciones que tengan por raíces las de las cuadráticas siguientes multiplicadas por el factor que se indica, y comprobar:

45. $x^2 - 7x + 12 = 0$, multiplicadas por 5.
46. $x^2 - 11x + 24 = 0$, multiplicadas por 2.
47. $3x^2 + 5x - 2 = 0$, multiplicadas por 4.
48. $7x^2 + 17x - 12 = 0$, multiplicadas por 10.
49. $15x^2 - 7x - 4 = 0$, multiplicadas por 15.
50. $2x^2 + x - 6 = 0$, multiplicadas por 8.

6

ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES DE FORMA CUADRATICA

I. RESOLUCION DE ECUACIONES DE FORMA CUADRATICA

366. Definiciones. *Se dice que una ecuación es de forma cuadrática, cuando su primer miembro consta de dos términos que contienen la incógnita (o una expresión que pueda considerarse como tal), siendo el exponente de dicha incógnita en uno de ellos doble del que figura en el otro, y tiene además un término independiente;* v. gr.:

$$x - 8\sqrt{x} - 13 = 0,$$
$$x^6 - 6x^3 = 16,$$
$$(x^2 - 2x)^2 - 18(x^2 - 2x) - 45 = 0.$$

Se llama *bicuadrada* la ecuación de la forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

367. Ejemplo. Sea resolver la ecuación $x^3 - 3x^{\frac{3}{2}} - 88 = 0$.

Haciendo $x^{\frac{3}{2}} = z$, la ecuación propuesta se escribe:

$$z^2 - 3z - 88 = 0.$$

Aplicando la fórmula general de resolución de las cuadráticas, se obtiene:

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 352}}{2} = \frac{3 \pm 19}{2}.$$
$$z_1 = 11; \quad z_2 = -8.$$

Resulta, por tanto: $\sqrt{x^3} = 11$, o sea, $x^3 = 121$;
$\sqrt{x^3} = -8$, o sea, $x^3 = 64$.

Resolviendo estas ecuaciones, se obtiene:

$$x_1 = \sqrt[3]{121}; \quad x_2 = 4.$$

COMPROBACIÓN:

$$121 - 3 \times 11 - 88 = 0; \quad 64 - 3(-8) - 88 = 0.$$

Por tanto: *Para resolver una ecuación de forma cuadrática:*

1º *Procédase como en las ecuaciones de segundo grado, y se obtienen así dos valores para la más baja potencia de la incógnita (o expresión que se considera como tal).*

2º *Resuélvanse después las ecuaciones que se forman igualando la más baja potencia de la incógnita a cada uno de los valores obtenidos.*

368. Aplicaciones. Resolver las ecuaciones siguientes:

1º La ecuación bicuadrada $x^4 - 21x^2 + 108 = 0$.

Considerando x^2 como incógnita, se tiene:

$$x^2 = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 432}}{2} = \frac{21 \pm 3}{2}.$$

Por tanto: $x_1^2 = 12$ y $x_2^2 = 9$.

De donde: $x = \sqrt{12}; \quad x_1 = 2\sqrt{3}, \quad x_2 = -2\sqrt{3};$

$x = \sqrt{9}; \quad x_3 = 3, \quad x_4 = -3.$

COMPROBACIÓN:

$$(\pm 2\sqrt{3})^4 - 21(\pm 2\sqrt{3})^2 + 108 = 12^2 - 21 \times 12 + 108 = 0.$$
$$(\pm 3)^4 - 21(\pm 3)^2 + 108 = 81 - 189 + 108 = 0.$$

2º La ecuación $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$.

Considerando $x^2 - x$ como incógnita, se tiene:

$$x^2 - x = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2.$$

Por tanto: $x^2 - x = 6$, o sea, $x^2 - x - 6 = 0$.

$x^2 - x = 2$, o sea, $x^2 - x - 2 = 0$.

Resolviendo estas ecuaciones, se obtiene:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = -1.$$

COMPROBACIÓN:

$$(3^2 - 3)^2 - 8(3^2 - 3) + 12 = 36 - 48 + 12 = 0.$$
$$[(-2)^2 - (-2)]^2 - 8[(-2)^2 - (-2)] + 12 = 36 - 48 + 12 = 0.$$
$$(2^2 - 2)^2 - 8(2^2 - 2) + 12 = 4 - 16 + 12 = 0.$$
$$[(-1)^2 - (-1)]^2 - 8[(-1)^2 - (-1)] + 12 = 4 - 16 + 12 = 0.$$

EJERCICIO 69

Resolver las ecuaciones siguientes:

1. $x - 8x^{\frac{1}{2}} + 15 = 0.$
2. $2x + 7\sqrt{x} - 4 = 0.$
3. $x^4 - 12x^2 + 27 = 0.$
4. $x^4 - 26x^2 + 25 = 0.$
5. $x^4 - 29x^2 + 100 = 0.$
6. $8x^4 + 20x^2 - 5.5 = 0.$
7. $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0.$
8. $4x^4 - 7x^2 - 261 = 0.$
9. $x^3 - 19x^{\frac{3}{2}} - 216 = 0.$
10. $5(8x - 5)^6 + 8(8x - 5)^3 - 85 = 0.$
11. $x^5 - 7x^3 - 8 = 0.$
12. $(x - 2)^2 + 3(x - 2) - 18 = 0.$
13. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) = 12.$
14. $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4.$
15. $12x^{-2} + x^{-1} - 35 = 0.$
16. $x^{\frac{6}{5}} + x^{\frac{3}{5}} - 702 = 0.$
17. $(x^2 + 2)^2 - 7(x^2 + 2) + 12 = 0.$
18. $(x^2 - 5)^2 - 9(x^2 - 5) + 20 = 0.$
19. $x^2 - 5x + 4 = 10\sqrt{x^2 - 5x - 5}.$
20. $x^2 + x + 3\sqrt{x^2 + x + 6} = 48.$
21. $10x^{\frac{2}{3}} + 7x^{\frac{1}{3}} = 12.$
22. $(4x^2 + 1)^2 - (4x^2 + 1) - 2 = 0.$
23. $8x^{-3} + 19x^{-\frac{3}{2}} - 27 = 0.$
24. $(x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 10 = 0.$

II. RESOLUCION DE SISTEMAS DE PRIMERO Y SEGUNDO GRADOS O DE SISTEMAS DE SEGUNDO GRADO, REDUCIBLES A FORMA CUADRATICA

369. Modo de resolución. Un sistema de dos ecuaciones simultáneas de primero y segundo grados, con dos incógnitas, o un sistema de dos ecuaciones de segundo grado, puede resolverse lo mismo que los de primer grado con dos incógnitas, de

diferentes maneras; pero, al igual que estos últimos, el mejor procedimiento es el de *eliminación* de una variable o incógnita por uno cualquiera de los procedimientos ya estudiados.

Es difícil dar una regla general acerca del método de eliminación que conviene seguir; sin embargo, cuando se trata de un sistema de dos ecuaciones de primero y segundo grados, es preferible el de *sustitución*.

A continuación se exponen algunos ejemplos, así como la representación gráfica de los sistemas propuestos.

370. Aplicaciones. **1º Resolver el sistema**

$$y + 7x = 25, \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = 25. \quad (2)$$

Despéjese y en (1): $y = 25 - 7x.$ (3)

Elévese (3) al cuadrado: $y^2 = 625 - 350x + 49x^2.$ (4)

Sustitúyase (4) en (2): $x^2 + 625 - 350x + 49x^2 = 25.$

Redúzcase: $50x^2 - 350x + 600 = 0.$

Divídase entre 50: $x^2 - 7x + 12 = 0.$

Resuélvase: $$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 3.$$

Sustitúyase x en (3): $y_1 = 25 - 7x_1 = 25 - 28 = -3;$

$$y_2 = 25 - 7x_2 = 25 - 21 = 4.$$

Las soluciones o raíces, son las intersecciones $A(4, -3)$ y $B(3, 4)$ de $y + 7x = 25$ (*recta*) con $x^2 + y^2 = 25$ (*circunferencia* de radio 5 y centro en el origen), (fig. 52).

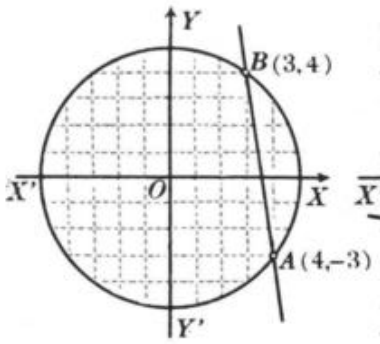


Fig. 52. — Gráfica del sistema $y + 7x = 25$, $x^2 + y^2 = 25$.

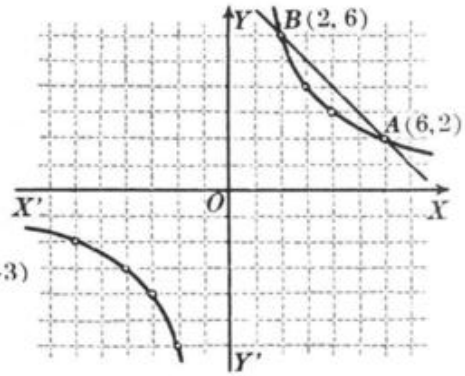


Fig. 53.— Gráfica del sistema $x + y = 8$, $xy = 12$.

2º Resolver el sistema $x + y = 8,$ (1)

$$xy = 12. \quad (2)$$

Despéjese y en (1): $y = 8 - x.$ (3)

Sustitúyase (3) en (2): $x(8 - x) = 12.$

Resuélvase: $8x - x^2 = 12$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2.$$

$$x_1 = 6; \quad x_2 = 2.$$

Sustitúyase x en (3): $y_1 = 8 - x_1 = 8 - 6 = 2;$

$$y_2 = 8 - x_2 = 8 - 2 = 6.$$

Las soluciones son las intersecciones $A(6, 2)$ y $B(2, 6)$ de la *recta* $x + y = 8$ con la *hipérbola equilátera* $xy = 12$ (fig. 53).

3º Resolver el sistema $x^2 + y^2 = 40,$ (1)

$$xy = 12. \quad (2)$$

Súmese a (1) el duplo de (2): $x^2 + y^2 + 2xy = 40 + 24 = 64.$ (3)

Réstese de (1) el duplo de (2): $x^2 + y^2 - 2xy = 40 - 24 = 16.$ (4)

Extráigase raíz cuadrada de (3): $x + y = \pm 8.$ (5)

Extráigase raíz cuadrada de (4): $x - y = \pm 4.$ (6)

Combinando el valor positivo de (5) con cada uno de los valores de (6), y luego el valor negativo de (5) con cada uno de los valores de (6), se forman los sistemas

$x + y = 8,$ $x - y = 4;$ $\quad$ $x + y = 8,$ $x - y = -4;$

$x + y = -8,$ $x - y = 4;$ $\quad$ $x + y = -8,$ $x - y = -4.$

Luego:

$x_1 = 6,$ $y_1 = 2;$ $\quad$ $x_2 = 2,$ $y_2 = 6;$

$x_3 = -2,$ $y_3 = -6;$ $\quad$ $x_4 = -6,$ $y_4 = -2.$

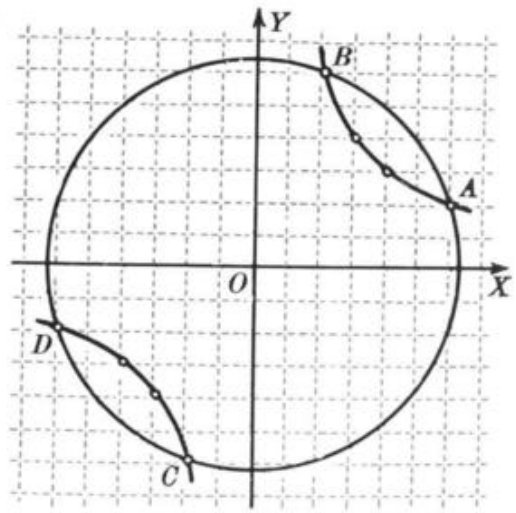


Fig. 54. — Gráfica del sistema $x^2 + y^2 = 40$, $xy = 12$.

Las soluciones son las intersecciones $A(6,2)$, $B(2,6)$, $C(-2,-6)$ y $D(-6,-2)$ de $x^2+y^2=40$, (*circunferencia* de centro en O y radio $=\sqrt{40}$) con $xy=12$, (*hipérbola equilátera*), (fig. 54).

La resolución del sistema anterior, por sustitución, habría sido:

Despéjese y en (2): $y=\frac{12}{x}$.

Sustitúyase y en (1): $x^2+\left(\frac{12}{x}\right)^2=40$.

Resuélvase: $x^2+\frac{144}{x^2}=40$,

$$x^4-40x^2+144=0,$$

$$x^2=20\pm\sqrt{400-144}=20\pm\sqrt{256}$$

$$=20\pm16.$$

$$x_1^2=36;\quad x_2^2=4.$$

$x_1=6,\ y_1=\frac{12}{6}=2;\qquad x_2=-6,\ y_2=\frac{12}{-6}=-2;$

$x_3=2,\ y_3=\frac{12}{2}=6;\qquad x_4=-2,\ y_4=\frac{12}{-2}=-6.$

4º Resolver el sistema $2x^2-3y^2=5$, (1)

$x^2+y^2=25$. (2)

Multiplíquese (2) por 2: $2x^2+2y^2=50$ (3)

Réstese (1) de (3): $-2x^2+3y^2=-5$

Resuélvase: $5y^2=45$

$y^2=9$ (4)

$y=\pm3$.

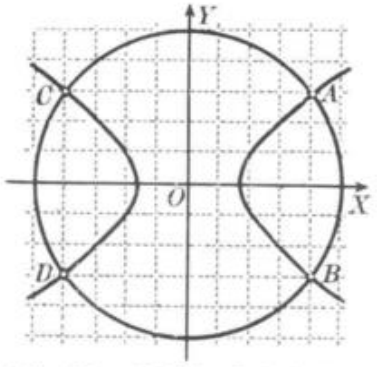


Fig. 55. — Gráfica del sistema $2x^2-3y^2=5$, $x^2+y^2=25$.

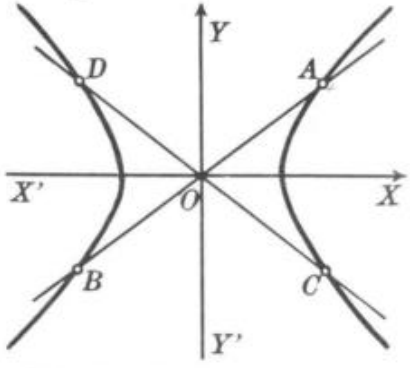


Fig. 56. — Gráfica del sistema $x^2-y^2=a^2$, $x=by$.

Sustitúyase (4) en (2): $x^2+9=25$.

Resuélvase: $x^2=25-9$

$x=\pm4$.

Por tanto: $x_1=4,\ x_2=4,\ x_3=-4,\ x_4=-4;$

$y_1=3,\ y_2=-3,\ y_3=3,\ y_4=-3.$

Las soluciones son dadas por los puntos de intersección $A(4,3)$, $B(4,-3)$, $C(-4,3)$ y $D(-4,-3)$ de la *hipérbola* $2x^2-3y^2=5$ con la *circunferencia* $x^2+y^2=25$ (fig. 55).

5º Resolver el sistema $x^2-y^2=a^2$,

$x=by$.

Sustituyendo en la primera ecuación el valor de x, resulta:

$$(by)^2-y^2=a^2,\quad \text{o sea,}\quad y^2=\frac{a^2}{b^2-1}.$$

De donde: $y=\pm\frac{a}{\sqrt{b^2-1}}$.

Por tanto: $x=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-1}}$.

El sistema se verifica para:

$$x_1=+\frac{ab}{\sqrt{b^2-1}},\qquad y_1=+\frac{a}{\sqrt{b^2-1}},$$

$$x_2=-\frac{ab}{\sqrt{b^2-1}},\qquad y_2=-\frac{a}{\sqrt{b^2-1}},$$

$$x_3=+\frac{ab}{\sqrt{b^2-1}},\qquad y_3=-\frac{a}{\sqrt{b^2-1}},$$

$$x_4=-\frac{ab}{\sqrt{b^2-1}},\qquad y_4=+\frac{a}{\sqrt{b^2-1}}.$$

Las soluciones son las intersecciones de la *hipérbola* $x^2-y^2=a^2$ con la *recta* $x=by$, en los puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$, si $b>0$; o en los puntos $C(x_3,y_3)$ y $D(x_4,y_4)$, si $b<0$ (fig. 56).

Notas. 1ª Como la segunda ecuación puede escribirse $\frac{x}{y}=b$, se ve que si b es positivo, x y y deben ser de mismo signo, y, por el contrario, x y y son de signos distintos si b es negativo. En el primer caso, el sistema tiene por raíces los dos primeros pares de valores, y en el segundo caso, los dos últimos.

2ª Para que los valores hallados sean reales, se necesita que b^2-1 sea mayor que 0, es decir, $b^2>1$.

EJERCICIO 70

Resolver los sistemas siguientes:

1. $2x + y = 10$, $x^2 + y^2 = 25$.
2. $2x - y = 5$, $x^2 + y^2 = 25$.
3. $x - 3y = 1$, $xy = 10$.
4. $x + y = 23$, $xy = 132$.
5. $x + y = 32$, $xy = 231$.
6. $x - y = 25$, $xy = 150$.
7. $x^2 + y^2 = 61$, $xy = 30$.
8. $x + y = 24$, $x^2 + y^2 = 290$.
9. $x^2 + y^2 = 25$, $xy = -12$.
10. $x^2 - y^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 34$.
11. $x^2 - y^2 = 64$, $xy = 255$.
12. $3x + y = 17$, $4x - 3y^2 = -20$.
13. $x^2 + y^2 = 10$, $2y = x + 5$.
14. $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$, $y = 1 + 2x$.
15. $2x^2 - 3y^2 + 58 = 0$, $3x^2 + y^2 = 111$.
16. $3x^2 + 2y^2 = 7$, $x^2 - y^2 = 3$.
17. $x^2 + y^2 = 74$, $7x = 5y$.
18. $2x + 3y = 13$, $5xy = 30$.
19. $2x^2 + 3y^2 = 11$, $xy = 2$.
20. $x^2 + y^2 = 73$, $xy = 24$.
21. $x^2 + y^2 = 52$, $x - y = 10$.
22. $10(x + y) = 11xy$, $x + y = 11$.
23. $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 - y^2 = b^2$.
24. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 7$, $x - y = 91$.

EJERCICIO 71

(Suplementario)

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 - 6x - 16 = 0$.
2. $3x^2 + 7x + 3 = 0$.
3. $11x^2 - 15x - 26 = 0$.
4. $2x^2 + 2x = 8$.

5. $3x^2 - 10x - 25 = 0$.
6. $4x^2 + 2x - 2 = 0$.
7. $x^3 - 7x + 12 = 0$.
8. $x^3 - 2ax + a^3 - 100 = 0$.
9. $4x^2 - 16ax + 16a^2 - b^2 = 0$.
10. $2ax^2 - (a^2 + 4)x + 2a = 0$.
11. $x^2 - (2a^2 + 2b^2)x + (a^2 - b^2)^2 = 0$.
12. $x^3 - 2ax = b^2 - a^2$.
13. $x(x - 2a^2) + a^4 - b^4 = 0$.
14. $\frac{x}{x-1} = \frac{6}{x+1}$.
15. $\frac{x+4}{x-3} = \frac{2x+6}{x-4}$.
16. $\frac{1}{x+7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3-x} = 0$.
17. $\frac{x+7}{x-5} + 7 = \frac{x+16}{x-6}$.
18. $\frac{1}{8x^2} - \frac{13}{24x} = -\frac{1}{2}$.
19. $2 - \frac{2x+1}{3} = \frac{1}{2x-1}$.

Decir, sin resolver, la naturaleza de las raíces.

20. $x^2 - 2x + 2 = 0$.
21. $x^2 - 4x + 4 = 0$.
22. $5x^2 - 4x + 8 = 0$.
23. $x^2 + 3x - 40 = 0$.

Dar, sin resolver, la suma y el producto de las raíces.

24. $x^2 - 49x + 360 = 0$.
25. $x^2 - 2x - 80 = 0$.
26. $4x^2 - 4x + 5 = 0$.
27. $144x^2 - 24x + 1 = 0$.

Formar ecuaciones de segundo grado cuyas raíces sean:

28. 1, 99.
29. 4, -20.
30. 10, -10.
31. 4, 4.
32. $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$.
33. $10 + \sqrt{-10}$, $10 - \sqrt{-10}$.

Resolver las siguientes ecuaciones:

34. $x^4 + 24x^2 + 4 = 0$.
35. $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$.
36. $8x^4 - 6x^2 + 9 = 0$.
37. $x^4 + 4x^2 = 0$.
38. $x^4 - 9x^2 = 0$.
39. $6x^4 - 7x^2 - 3 = 0$.
40. $4x^2(x + 2)^2 = 8x^4(x + 2)^2$.
41. $\sqrt{5 + x} + \sqrt{5 - x} = \frac{12}{\sqrt{5 + x}}$
42. $m\sqrt{\frac{a}{m}} - 1 = \sqrt{m^2 - b^2}$.
43. $\sqrt{x + 7 + \sqrt{5(x - 2)}} = 3$.

Resolver los sistemas siguientes:

44. $x^2+y^2+xy=49$, $x+y=0$.

45. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{10}{81}$, $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{8}{81}$.

46. $x^3y^3=216$, $x^2y^2+x+y=41$.

47. $x^3-y^3=61$, $x-y=1$.

48. $x^4-y^4=65$, $x^2+y^2=13$.

49. $3x^2-2y^2=43$, $5x+3z=37$, $4x-5z=0$.

III. PROBLEMAS CUYA RESOLUCION DA LUGAR A UNA CUADRATICA O A UN SISTEMA DE PRIMERO Y SEGUNDO GRADOS

371. Ejemplos. 1º *Hallar un número tal que sumado con su cuadrado dé* 2 550.

Número buscado: x.

Su cuadrado: x^2.

Conforme al enunciado: $x+x^2=2\,550$,

o sea: $x^2+x-2\,550=0$,

cuyas raíces son: $x_1=50$ y $x_2=-51$.

COMPROBACIÓN:

$$50+50^2=50+2\,500=2\,550;$$
$$-51+(-51)^2=-51+2\,601=2\,550.$$

Por tanto, los números 50 y -51 satisfacen las condiciones del problema.

2º *¿Cuál es el número que disminuído en su raíz cuadrada da* 3 660?

Número pedido: x.

Su raíz cuadrada: $x^{\frac{1}{2}}$

Según el enunciado: $x-x^{\frac{1}{2}}=3\,660$,

o sea, $x-x^{\frac{1}{2}}-3\,660=0$,

cuyas raíces son: 61 y -60.

De donde:

$$x_1=61^2=3\,721 \quad \text{y} \quad x_2=(-60)^2=3\,600.$$

El primer valor satisface, pues:

$$3\,721-61=3\,660.$$

La segunda raíz satisface también, siempre que al número se le reste su raíz negativa.

En efecto: $3\,600-(-60)=3\,600+60=3\,660$.

3º *Cierto número de personas alquilan un camión en* \$ 32. *En el momento de la salida, faltan dos personas, y por eso las demás tienen que pagar cada una* 80 ¢ *más. ¿Cuántas personas había al contratar el camión?*

Número de personas: x.

Cuota de cada persona: y.

Conforme al enunciado: $xy=32$. (1)

En el momento de la salida el número de personas es $x-2$, y por eso cada una tiene que pagar 80 ¢ más.

Resulta, por tanto:

$$(x-2)(y+.80)=32,$$
$$xy-2y+.80x=33.60. \quad (2)$$

Sustitúyase (1) en (2):

$$32-2y+.80x=33.60.$$

Simplifíquese: $2x=5y+4$.

El sistema obtenido $xy=32$,

$$2x=5y+4,$$

resuelto en y da: $y_1=3.20$, $y_2=-4$.

Valor de x: $x=\frac{32}{3.2}=10$.

Había 10 personas.

La solución $y_2=-4$, es inadmisible.

4º *La superficie de un triángulo rectángulo es* 150 m^2, *y la hipotenusa mide* 25 m. *Calcúlese la longitud de los catetos.*

Sea a la hipotenusa, b y c los catetos.

Según el teorema de Pitágoras: $c^2 + b^2 = a^2 = 625$.

Según los datos del problema: $\frac{1}{2}bc = 150$, o sea, $2bc = 600$.

Sumando y restando sucesivamente, se obtiene:

$$b^2 + c^2 + 2bc = 625 + 600 = 1\,225; \quad (b + c)^2 = 35^2;$$
$$b^2 + c^2 - 2bc = 625 - 600 = \quad 25; \quad (b - c)^2 = \quad 5^2.$$

$$b + c = 35; \quad b - c = 5;$$
$$2b = 40; \quad b = 20;$$
$$2c = 30; \quad c = 15.$$

Los catetos miden 20 m y 15 m, respectivamente.

5º *Hallar, en una recta* AB, *de* 6 m *de largo, que une dos luces, una de* 9 *bujías y otra de* 4, *un punto igualmente iluminado por ambas luces.*

Sean A y B las dos luces, y O el punto buscado. Si x es la distancia de A al punto O, $6 - x$ es la distancia de B al mismo punto (fig. 57).

Fig. 57.

Ahora bien, se sabe que las iluminaciones son inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias de los puntos iluminados a los focos de luz.

Si un punto situado a 1 m de distancia de A, recibe una iluminación igual a 9, el punto que se halla a la distancia x, recibe una iluminación de $\frac{9}{x^2}$.

Análogamente, un punto situado a la distancia $6 - x$ de B, recibe una iluminación de $\frac{4}{(6-x)^2}$.

Como las dos iluminaciones son iguales, se tiene la ecuación

$$\frac{9}{x^2} = \frac{4}{(6-x)^2}; \quad \text{o bien:} \quad 5x^2 - 108x + 324 = 0,$$

cuyas raíces son: $x_1 = 3.60$ y $x_2 = 18$.

Así, pues, hay en la línea dada dos puntos que satisfacen las condiciones del problema: uno es O, sobre la recta, a 3.60 m de A y a 2.40 m de B; el otro es O', sobre la prolongación de la recta, en la dirección AB, a 18 m de distancia de A, y a 12 m de B.

EJERCICIO 72

Resolver los siguientes problemas:

1. Si al cuadrado de un número se agrega el quíntuplo de dicho número, se obtiene 36. Hállese el número.

2. Si se resta cierto número de su cuadrado, el resultado es 30. Hállese el número.

3. Hallar dos números que tengan 65 por suma y 1 050 por producto.

4. Hallar dos números que tengan 432 por producto y 3 por cociente.

5. La diferencia entre dos números es 14 y su producto es 576. ¿Cuáles son los números?

6. Hallar dos números que den 7 por suma, y tales que la suma de sus cubos sea 133.

7. Hallar cuatro números consecutivos, tales que si los dos primeros se toman como dígitos de un número, dicho número resulta igual al producto de los otros dos.

8. Se ha comprado casimir por valor de \$ 19 600; el precio del metro es igual al número de metros comprados. Hállese el precio de 1 metro.

9. Un hombre vende un plato en \$ 21, y pierde un tanto % igual al costo del plato. ¿Cuánto cuesta el plato?

10. Un hacendado ha comprado cierto número de ovejas por \$ 2 160. Si hubiera comprado 2 más, por la misma cantidad, habrían costado \$ 12 menos cada una. ¿Cuántas compró?

11. Un hombre compró cierto número de llaveros en \$ 126. El precio de cada llavero es 2 séptimos del **número** de llaveros. ¿Cuántos llaveros ha comprado, y a qué precio?

12. Un campo rectangular es tal que su longitud es el triple de la anchura. Si se aumenta la longitud en 20 m y la anchura en 8 m, el área resulta triplicada. ¿Cuál es la superficie del campo?

13. La longitud de un campo rectangular es de 20 m mayor que la anchura. Hállense sus dimensiones, sabiendo que la superficie es de 2 400 m^2.

14. El área de un campo rectangular es de 216 m², y su perímetro es de 60 m. Calcúlense sus dimensiones.

15. La circunferencia de una rueda delantera de un carruaje tiene 4 pies menos que la de una rueda trasera. Después de recorridos 1 200 pies, la rueda delantera ha dado 25 vueltas más que la trasera. Hállese la circunferencia de cada rueda.

16. La suma de los catetos de un triángulo rectángulo es 47 m, y la hipotenusa mide 37 m. Hállese la longitud de los catetos.

17. La diferencia entre los catetos de un triángulo rectángulo es 8 m, y la hipotenusa mide 40 m. Calcúlese la longitud de los catetos.

18. La suma de los cuadrados de 2 números, más el quíntuplo de su producto, es 445; y la suma de sus cuadrados, menos su producto, es 67. Hállense los dos números.

19. Un andarín ha recorrido 105 km. Si hubiera andado 2 km más por hora, su viaje habría durado 6 horas menos. ¿Cuántos km recorrió por hora?

20. Se ha repartido la cantidad de $120 entre cierto número de personas. Si cada una hubiera recibido $7 menos, habría recibido un número de pesos igual al del de las personas que había. Hállese el número de personas.

21. Las edades de dos niños son tales que el cociente del cuadrado de la del primero entre la del segundo es 28, y que el cuadrado de la del segundo, dividido entre la del primero, da 3.5 por cociente. Hallar las dos edades.

22. Hallar dos números que sean entre sí como 4 es a 7, sabiendo que la suma de sus cuadrados es 6 500.

23. Si del cuadrado de mi edad se resta el producto de dicha edad por 12, se obtiene 108. ¿Cuál es mi edad?

24. Hallar dos números que den 320 por producto, y tales que el producto del mayor por la diferencia entre los dos sea 704.

25. Un joyero vende un prendedor en $ 31.25, ganando un tanto % igual a la cantidad de pesos del precio de compra. ¿Cuánto le había costado?

26. ¿Cuál es el número que sumado con su raíz cuadrada da por resultado 1 640?

27. Un hacendado ha comprado cierto número de bueyes y carneros. ¿Cuántos ha comprado, sabiendo que hay 50 carneros más que bueyes, y que la suma de los dos números, multiplicada por su diferencia, da 5 500?

28. Ganando $ 112 más, habría yo ganado el cuadrado de mi haber; ganando $ 112 menos, habría ganado, el doble de dicho haber. ¿Cuánto tenía y cuánto he ganado?

29. Un general dispone sus soldados en hileras y forma con ellas un cuadrado. Después de un primer arreglo, le sobran 320 soldados; procura entonces poner 3 soldados más en cada línea, pero, para completar el cuadrado, le faltan 253. ¿Cuántos soldados tiene?

30. Hallar 2 números tales que su suma, su diferencia y el producto de sus cuadrados, sean números proporcionales a 17, 9 y 2 704.

31. Dos capitales, cuya suma es $ 60 000, reditúan, el primero $ 1 600 y el segundo $ 1 200. Sabiendo que la suma de los tantos % es 10, hállense los capitales y los tantos %.

32. Hallar tres números consecutivos cuyo producto sea igual a su suma multiplicada por 8.

33. Dos llaves llenan un depósito en 6 horas. ¿Cuánto tiempo necesitaría cada una de ellas, separadamente, para llenarlo, sabiendo que la primera tarda 5 horas más que la segunda?

34. Dos capitales difieren en $ 5 000, y el tanto % del capital mayor excede en $ 1 al del capital menor. Sabiendo que el rédito anual del primero es $ 1 000 y el del segundo $ 600, hallar los dos capitales y los tantos %.

35. Un tanque puede ser llenado por 2 llaves juntas en 3 horas 3 cuartos. La llave mayor podría llenarlo sola en 4 horas menos que la otra. ¿En cuántas horas lo llenaría cada una, separadamente?

36. En un triángulo rectángulo, se conocen el cateto b y la altura h relativa a la hipotenusa. Calcúlense la hipotenusa a y el otro cateto c.

37. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 m, y los catetos 6 y 8 m, respectivamente. Calcúlese la altura relativa a la hipotenusa.

7

TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO
SU VARIACION Y REPRESENTACION
INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

372. Definición. *Trinomio de segundo grado es el que consta de un término que contiene el cuadrado de la variable, de un segundo término con la primera potencia de dicha variable y de un término independiente.*

La forma general de un trinomio cuadrático es

$$ax^2 + bx + c,$$

en que a, b, c representan números algebraicos cualesquiera.

373. Variación y representación. Sea el trinomio $x^2 + 4x + 3$. Si se atribuyen a la variable x valores enteros, comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty$, se puede formar el cuadro siguiente:

x	$-\infty$	-5	crece	-4	-3	-2	-1	0	1	crece	∞
$y=x^2+4x+3$	∞	8	decrece	3	0	-1 (mín.)	0	3	8	crece	∞
Puntos		A		B	C	M	D	E	F		

De la inspección del cuadro que precede y de la fig. 58, se deduce:

1º Cuando x crece de $-\infty$ a -3, el trinomio decrece, permaneciendo positivo.

2º El trinomio se anula para un primer valor de x igual a -3, que es una raíz del trinomio propuesto, igualado a cero; -3 es el primer cero del trinomio.

3º El trinomio alcanza su valor mínimo cuando a x se le atribuye el valor -2, y este mínimo es -1.

4º El trinomio se vuelve a anular para un valor de x igual a -1, que es la otra raíz del trinomio, o segundo cero del trinomio.

5º Cuando x crece de -1 a ∞, el trinomio crece también, y con mayor rapidez que la variable x.

6º El trinomio es positivo, como el coeficiente del término cuadrático, para todo valor de x no comprendido entre las raíces, o sea, para $-3 > x > -1$.

7º El trinomio es negativo, es decir, de signo contrario al del coeficiente de su primer término, para todo valor de x comprendido entre las raíces, por ejemplo, $x = -2.5$, -2, -1.5, etc.

8º Cuando los valores de x se apartan igualmente del valor -2, se obtienen valores iguales para el trinomio, lo cual significa que la curva, que es la representación gráfica del trinomio, es simétrica con respecto a la perpendicular al eje $X'X$ en el punto de abscisa -2.

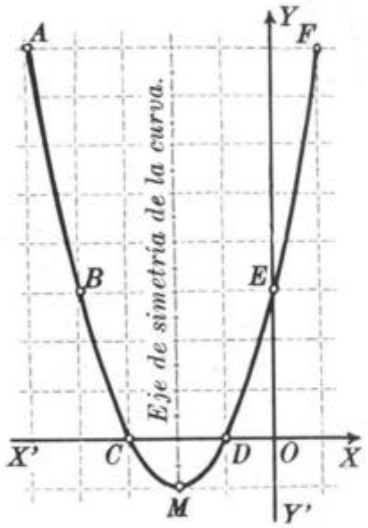


Fig. 58. — Gráfica de $x^2 + 4x + 3$.

374. Máximo y mínimo de un trinomio. Sea el trinomio

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Póngase a en factor común:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Agréguese y réstese, en el paréntesis, el cuadrado de la mitad del coeficiente medio:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right),$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \qquad (1)$$

El segundo miembro sólo tiene x en la expresión $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Si en ella se hace $x = -\frac{b}{2a}$, el valor que adquiere el trinomio es:

$$y = a \times \frac{4ac - b^2}{4a^2} = \frac{4ac - b^2}{4a}. \qquad (2)$$

Si $x \neq -\frac{b}{2a}$, por ejemplo, $x = -\frac{b}{2a} \pm \beta$, el valor del trinomio es:

$$y = a\beta^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \qquad (3)$$

Conviene distinguir dos casos:

1º Si $a > 0$, el valor (2) es menor que cualquier valor de (3); entonces *el trinomio tiene un valor mínimo*, que es (2).

2º Si $a < 0$, el valor (2) es mayor que cualquier valor de (3); en este caso *el trinomio tiene un valor máximo*, que es (2).

Tanto el mínimo como el máximo se obtienen dando a x el valor $-\frac{b}{2a}$, y ambos tienen por expresión $\frac{4ac-b^2}{4a}$; el coeficiente a de x^2 es el que indica si hay máximo o si hay mínimo.

375. Aplicación. Dado el trinomio $y = x^2 - 6x + 8$, averiguar si tiene máximo o mínimo, y para qué valor de x. Calcular su valor.

1º El trinomio tiene mínimo, porque $a > 0$.

2º El mínimo se obtiene haciendo $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$.

3º Su valor es: $\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4\times 8-(-6)^2}{4} = \frac{32-36}{4} = -1$.

COMPROBACIÓN: Si se hace $x \neq 3$, 2 y 4, por ej., se obtiene:

para $x = 2$: $y = 2^2 - 6\times 2 + 8 = 4 - 12 + 8 = 0$.

para $x = 4$: $y = 4^2 - 6\times 4 + 8 = 16 - 24 + 8 = 24 - 24 = 0$.

376. Factorización de un trinomio cuadrático. Según se acaba de ver:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Considerando $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ como el cuadrado de su raíz cuadrada, se puede escribir, sucesivamente:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right],$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right). \qquad (4)$$

Las raíces del trimonio igualado a cero son:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Si de x se resta cada una de esas raíces, resulta:

$$x - x_1 = x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x - x_2 = x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

valores que, puestos en la igualdad (4) dan:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2),$$

resultado ya obtenido en el Nº 358.

377. Variación de los signos del trinomio. Sea el trinomio

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Con $a > 0$, se deben considerar tres casos:

1º $b^2 - 4ac > 0$.

La ecuación que se obtiene al igualar a cero el trinomio tiene dos raíces reales y desiguales, es decir, el trinomio se anula para dos valores de x. La curva representativa de las variaciones de su valor, corta en dos puntos al eje $X'X$ (fig. 59).

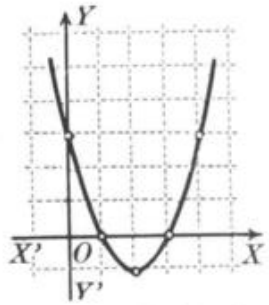


Fig. 59. — Grafica de $x^2 - 4x + 3$.

El trinomio es positivo para valores de x no comprendidos entre las raíces. En efecto: supóngase que $x > x_1$. Entonces la diferencia $x - x_1$ es positiva, y con mayor razón $x - x_2$. El producto de estos dos factores es, por tanto, positivo.

Si se supone ahora que $x < x_2$, la diferencia $x - x_2$ es negativa, y lo es también $x - x_1$. Siendo negativos los dos factores, su producto es positivo.

Por consiguiente, el trinomio es de mismo signo que a para todo valor de x no comprendido entre las raíces.

Si se da a x un valor comprendido entre las raíces, es decir, si se hace $x_1 > x > x_2$, la diferencia $x - x_1$ es negativa, y la otra, $x - x_2$ es positiva. El producto de estos 2 factores es negativo, y multiplicado por a, que es positivo, da un resultado negativo. Por tanto, el trinomio es negativo para todo valor de x comprendido entre las raíces.

Por ser $a > 0$, el trinomio tiene mínimo.

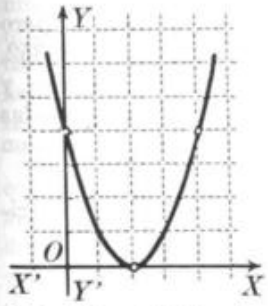


Fig. 60. — Gráfica de $x^2 - 4x + 4$.

La gráfica de cualquier trinomio de segundo grado que se anula para 2 valores de x, se caracteriza, como la de la figura 59, por ser una parábola que corta en dos puntos al eje $X'X$, y tener una parte en la región de las ordenadas positivas y otra en la región de las ordenadas negativas.

2º $b^2 - 4ac = 0$.

La ecuación que resulta de igualar a cero el trinomio tiene 2 raíces reales e iguales, o sea una raíz doble; su valor puede escribirse: $y = a(x - x_1)^2$; dicho valor es positivo, cualquiera que sea el valor que se asigne a x.

El trinomio tiene un solo cero, es decir, únicamente se anula para $x = x_1$; todas las ordenadas de la curva que representa al trinomio, son positivas y solamente es nula la ordenada que corresponde a la raíz.

La curva es, por consiguiente, tangente al eje $X'X$ en el punto en que la abscisa es igual a la raíz (fig. 60).

La gráfica de todo trinomio que sólo tiene un cero, o sea, que se anula para un solo valor de x, se caracteriza, como la de la figura 60, por ser una parábola tangente al eje $X'X$.

3º $b^2 - 4ac < 0$.

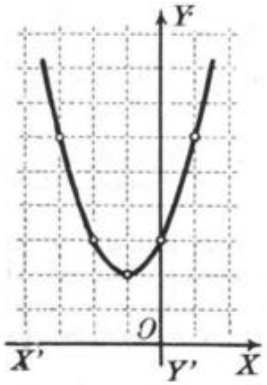


Fig. 61. — Gráfica de x^2+2x+3.

La ecuación que resulta de igualar a cero el trinomio, tiene dos raíces complejas.

Siendo $b^2 - 4ac < 0$, resulta $4ac - b^2 > 0$, y la igualdad

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

puede escribirse:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

o sea:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)^2\right].$$

Por tanto, la ordenada de un punto cualquiera de la curva representativa del trinomio es positiva, pues es el producto de un factor positivo a por la suma de dos cuadrados.

En todo trinomio que no tiene ningún cero, es decir, que no se anula para ningún valor de x, la gráfica se caracteriza por una parábola que no toca al eje $X'X$, como se ve en la figura 61.

Con $a < 0$, se distinguen los mismos casos que para $a > 0$.

1º $b^2 - 4ac > 0$.

Podrían hacerse consideraciones análogas a las ya hechas; pero puede prescindirse de ello, teniendo presente lo expuesto en el Nº 352, o sea, que dos trinomios que tienen su primer coeficiente simétrico y las mismas raíces, quedan representados por dos parábolas apoyadas en los mismos puntos del eje $X'X$, y simétricamente dispuestas con respecto a dicho eje.

Dedúcese de esto que las variaciones de los signos de los dos trinomios son en sentido contrario.

Sea el trinomio $-x^2 + 5x - 4$.

Se puede escribir:

$$-x^2 + 5x - 4 = -(x^2 - 5x + 4).$$

Las raíces de $x^2 - 5x + 4 = 0$, son 4 y 1; luego, el trinomio es positivo para $1 > x > 4$, y negativo para $1 < x < 4$; por tanto, $-(x^2 - 5x + 4)$ es positivo para $1 < x < 4$, y negativo para $1 > x > 4$, es decir, es positivo para valores de x comprendidos entre las raíces, y negativo para todo valor de x tomado fuera de ellas.

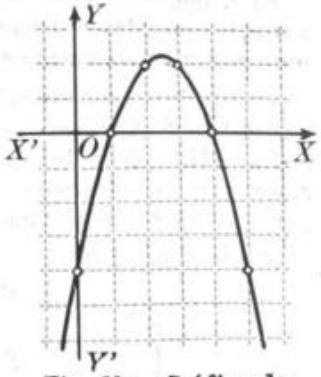


Fig. 62. — Gráfica de $-x^2+5x-4$.

En casos como éste, en que $a < 0$ y $b^2 - 4ac > 0$, la curva representativa del trinomio se caracteriza por ser una parábola que corta en dos puntos al eje $X'X$ y es abierta hacia la región de las yes negativas, como se ve en la figura 62.

2º $b^2 - 4ac = 0$.

Si se trata de un trinomio en que $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación que se forma al igualar a cero el trinomio, tiene una raíz doble.

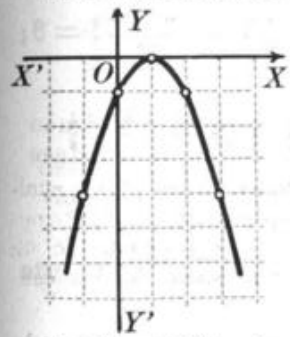


Fig. 63. — Gráfica de $-x^2+2x-1$.

Haciendo consideraciones análogas a las que se acaban de hacer, se deduce que el trinomio se anula para un valor de x igual a la raíz, y es negativo para todos los demás valores de x.

Todo trinomio en que $a < 0$ y $b^2 - 4ac = 0$ queda representado por una parábola que toca en un punto al eje $X'X$ y es abierta hacia la región de las yes negativas, como se ve en la figura 63.

3º $b^2 - 4ac < 0$.

En este caso el trinomio es negativo para cualquier valor de x.

En todo trinomio cuadrático que no tiene ningún cero, es decir, que no se anula para ningún valor de x, la gráfica es una parábola que no toca al eje $X'X$, y es abierta hacia la región de las yes negativas, como se ve en la figura 64.

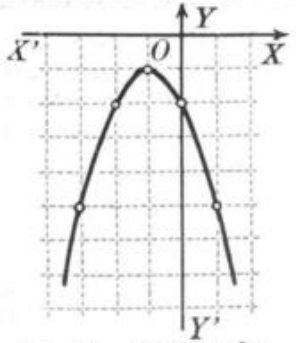


Fig. 64. — Gráfica de $-x^2-2x-2$.

Con respecto al signo del trinomio, las consideraciones que preceden pueden resumirse diciendo: *Todo trinomio cuadrático es del mismo signo que el coeficiente del término cuadrático, excepto el caso en que se dé a la variable un valor comprendido entre las raíces.*

378. Inecuaciones de segundo grado. 1º Averiguar en qué intervalo es positivo el trinomio $y = x^2 - 3x - 10$, es decir, para qué valores de x se tiene:

$$x^2 - 3x - 10 > 0.$$

Las raíces de este trinomio igualado a cero son -2 y 5, y el primer coeficiente es positivo; por tanto, y es positivo para $-2 > x > 5$.

Esquemáticamente puede indicarse así (fig. 65):

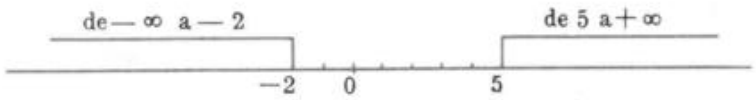


Fig. 65.

COMPROBACIÓN:

Si $x = -3$, $y = (-3)^2 - 3(-3) - 10 = 9 + 9 - 10 = 8$;

si $x = 6$, $y = 6^2 - 3 \times 6 - 10 = 36 - 18 - 10 = 8$.

2º Decir para qué valores de x es positivo el trinomio $y = -3x^2 + 8x - 11$, o sea, para qué valores de x se satisface la desigualdad

$$-3x^2 + 8x - 11 > 0.$$

Las raíces de la ecuación que se forma al igualar a cero este trinomio, son complejas:

$$x_1 = \tfrac{1}{3}(4 + \sqrt{-17}), \quad x_2 = \tfrac{1}{3}(4 - \sqrt{-17}).$$

Como el primer coeficiente es negativo, resulta que el trinomio es siempre negativo; no hay valor de x que satisfaga la desigualdad.

3º Hallar los valores de x que satisfacen la desigualdad

$$x^2 - 40x + 400 < 0.$$

Las raíces de la ecuación que resulta de igualar a cero este trinomio son iguales, o sea, hay una raíz doble, que es 20. Por tanto, el trinomio es siempre de mismo signo que su primer coeficiente, es decir, es siempre positivo.

Efectivamente: $x^2 - 40x + 400 = (x - 20)^2$,

cantidad siempre positiva; por tanto, la desigualdad nunca se satisface.

4º Hallar los valores de x que satisfacen simultáneamente las desigualdades

$$x^2 - 13x + 36 > 0,$$
$$-x^2 + 14x - 24 > 0.$$

Las raíces de las ecuaciones que se forman con estos trinomios son, respectivamente:

4 y 9; 2 y 12.

La primera desigualdad se satisface para $4 > x > 9$, y la segunda, siempre que se tenga: $2 < x < 12$.

Esquemáticamente pueden indicarse así (fig. 66):

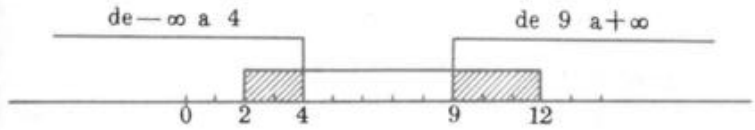


Fig. 66.

Se ve que los valores que satisfacen simultáneamente las dos desigualdades son los comprendidos entre 2 y 4 (primer intervalo), y los comprendidos entre 9 y 12 (segundo intervalo).

COMPROBACIÓN: Para un número del primer intervalo, 2.5, por ejemplo, se tiene sucesivamente:

$$6.25 - 32.5 + 36 = 42.25 - 32.5 = 9.75;$$
$$-6.25 + 35 - 24 = 35 - 30.25 = 4.75.$$

Para un número del segundo intervalo, 10 por ejemplo, se tiene:

$$100 - 130 + 36 = 136 - 130 = 6;$$
$$-100 + 140 - 24 = 140 - 124 = 16.$$

EJERCICIO 73

Averiguar si los trinomios que siguen tienen máximo o mínimo.

1. $x^2 - 5x + 4$.
2. $-x^2 + 3x - 2$.
3. $x^2 - 2x + 1$.
4. $2x^2 - 5x + 8$.
5. $-3x^2 + 5x - 4$.

¿Para qué valores de x los trinomios siguientes tienen máximo o mínimo? Calcular esos máximos o mínimos.

6. $x^2 - x - 6$.
7. $-x^2 + 3x + 10$.
8. $-x^2 + 2x - 1$.
9. $x^2 - 6x + 5$.
10. $x^2 + 2x - 8$.
11. $-x^2 + 5x - 6$.

¿En qué intervalo, o sea, para qué valores de x son positivos los trinomios siguientes?

12. $x^2 - 3x - 10$.
13. $-x^2 - 2x + 5$.
14. $x^2 + 2x - 8$.
15. $-x^2 + 5x - 6$.
16. $2x^2 - 5x + 2$.

Dígase para qué valores de x son negativos los trinomios:

17. $-x^2 + 3x + 10$.
18. $x^2 + 2x - 5$.
19. $x^2 - 8x + 15$.
20. $-x^2 + 10x - 21$.
21. $x^2 - 5x + 6$.

22. Averígüese si los números 10 y 2 son exteriores a las raíces del trinomio $x^2 - 17x + 60$, o si están comprendidos entre ellas.

23. ¿Puede adquirir un valor positivo el trinomio $-8x^2 + 28x - 25$?

Decir para qué valores de x se satisfacen las desigualdades siguientes:

24. $x^2 - 4 > 0$.
25. $x^2 + 1 < 0$.
26. $-x^2 - 289 > 0$.
27. $x^4 - 16 < 0$.
28. $-x^2 + ax > 0$.
29. $b^2x^2 - a^2 < 0$.
30. $x^4 - x^2 < 0$.
31. $3x(3x - 9) > 0$.
32. $x^2 - 4x + 5 > 0$.
33. $x^2 + 2ax + a^2 < 0$.
34. $-x^2 + 12x - 35 > 0$.
35. $x^2 + 11x + 28 < 0$.
36. $-x^2 + 33x - 272.5 < 0$.
37. $-x^2 + 9x - 20 > 0$.
38. $x^2 - 22x + 121 < 0$.
39. $x^2 - (a^2 + b^2)x + a^2b^2 > 0$.

¿En qué intervalo se satisfacen simultáneamente las desigualdades siguientes?

40. $x^2 - 23x + 60 > 0$, $x^2 - 40x + 300 > 0$.
41. $x^2 - 23x + 60 > 0$, $x^2 - 40x + 300 < 0$.
42. $x^2 - 23x + 60 < 0$, $x^2 - 40x + 300 > 0$.
43. $-x^2 + 23x - 60 > 0$, $-x^2 + 40x - 300 > 0$.
44. $x^2 - 18x + 45 < 0$, $x^2 - 20x + 96 > 0$.
45. $x^2 + 18x + 45 > 0$, $x^2 - 11x + 28 > 0$.
46. $-x^2 + 2x - 1 < 0$, $x^2 - 100 < 0$.
47. $x^2 + x - 6 = 0$, $x^2 + 3x - 4 > 0$.
48. $x^2 - 12x + 32 > 0$, $x^2 - 13x + 22 < 0$.
49. $ax^2 + bx > 0$, $ax^2 + bx + c > 0$.
50. $ax^2 + b < 0$, $bx^2 - b^2 > 0$.
51. $x^2 - 16 > 0$, $x^2 - 28x > 0$.
52. $x^2 - 31x + 30 < 0$, $x^2 - 31x + 58 < 0$, $x^2 - 31x + 238 < 0$.
53. $x^2 - 100x + 99 > 0$, $x^2 - 100x + 196 > 0$, $x^2 - 100x + 900 < 0$.

54. La ecuación de una curva es: $y = x + 2 \pm \sqrt{-x^2 - 12x + 28}$. ¿Entre qué límites puede variar x, para que y sea real, es decir, entre qué límites, en el sentido de las equis, está comprendida la curva?

55. La ecuación de una curva es: $y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{3} \pm \frac{1}{5}\sqrt{2x^2 - 11x + 5}$. ¿Entre qué límites puede variar x para que la curva tenga puntos, o sea, resulte real y?

8

TEORIA DEL BINOMIO

I. DESARROLLO DE LAS POTENCIAS DE UN BINOMIO

379. Potencias de un binomio. Según se ha visto:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Si se multiplica $(a+b)^3$ por $(a+b)$, se obtiene:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Por multiplicación de $(a+b)^4$ por $(a+b)$, se obtiene igualmente:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Se observa que:

1º *En cada desarrollo, el número de términos es igual al exponente del binomio más* 1.

2º *El grado del primer término del desarrollo es igual al grado del binomio; disminuye luego sucesivamente en* 1 *en cada término que sigue, siendo así factor en todos los términos del desarrollo, excepto en el último.*

3º *El segundo término* b *del binomio comienza en el segundo término del desarrollo, con exponente* 1; *aumenta después, sucesivamente, en* 1 *en cada uno de los términos siguientes, resultando así factor en todos los términos, excepto en el primero.*

4º *El coeficiente del primer término es* 1, *y el del segundo es igual al exponente del binomio.*

5º *El coeficiente de un término cualquiera es igual al producto del coeficiente del término inmediato anterior, por el exponente de* a *en este término, dividido entre el número que indica el orden de este mismo término en el desarrollo binomial.*

6º *El grado de cada término es igual al grado del binomio.*

7º *Los términos que equidistan de los extremos, tienen coeficientes iguales.*

380. Aplicaciones. Desarrollar:

$$(2x+3y)^4 \quad \text{y} \quad (x-3z)^5.$$

$$(2x+3y)^4 = (2x)^4 + 4(2x)^3(3y) + 6(2x)^2(3y)^2 + 4(2x)(3y)^3 + (3y)^4$$
$$= 16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4.$$

$$(x-3z)^5 = x^5 + 5x^4(-3z) + 10x^3(-3z)^2 + 10x^2(-3z)^3 + 5x(-3z)^4 + (-3z)^5$$
$$= x^5 - 15x^4z + 90x^3z^2 - 270x^2z^3 + 405xz^4 - 243z^5.$$

Notas. 1ª Obsérvese que cuando el segundo término del desarrollo es substractivo, los signos + y − se van alternando en el desarrollo.

2ª Si alguno de los términos del binomio tiene el coeficiente diferente de 1, conviene escribir primero sus potencias sin desarrollarlas, y efectuar después las operaciones indicadas, como se ha hecho en las anteriores aplicaciones.

EJERCICIO 74

1. ¿Cuántos términos tiene el desarrollo de $(a+b)^5$?

2. ¿Hay, en el desarrollo de $(a+b)^4$, algún término que no contenga a como factor? ¿que no contenga b?

3. ¿Cuál es el exponente de a en el penúltimo término del desarrollo de $(a+b)^5$?

4. ¿Cuál es el exponente de b en el segundo término del desarrollo de $(a+b)^4$?

5. Calcular cada uno de los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^8$.

Desarrollar, aplicando lo expuesto en el Nº 379:

6. $(a+m)^3$.
7. $(a+x)^4$.
8. $(x+1)^5$.
9. $(x-1)^5$.
10. $(1+x)^5$.
11. $(1-x)^5$.
12. $(2x+b)^4$.
13. $(a-2c)^5$.
14. $\left(\frac{a}{5} - 5b\right)^3$.
15. $\left(2a + \frac{c}{2}\right)^4$.
16. $\left(\frac{2}{3}m + 4n\right)^4$.
17. $\left(\frac{a}{2} + 3b\right)^5$.
18. $(2a+5c)^4$.
19. $\left(\frac{m}{3} + 2n^2\right)^5$.
20. $(4x^3 - 3z)^4$.

II. FORMULA GENERAL DEL BINOMIO

381. Inducción matemática. Por multiplicaciones sucesivas se han obtenido los desarrollos de las potencias segunda, tercera, cuarta y quinta del binomio $(a+b)$. Los resultados alcanzados han dado lugar a las observaciones hechas en el Nº 379, de las cuales es muy importante la que se refiere al cálculo del coeficiente de un término cualquiera del desarrollo. Conviene ahora saber si todo lo expuesto en el citado número se aplica también al desarrollo del binomio $(a+b)$ para potencias superiores a la quinta.

A continuación se demuestra que estas leyes son generales, mediante la *inducción matemática.*

Supóngase que el modo de formación de los términos del desarrollo del binomio $(a+b)^m$ se ajuste a lo expuesto en el Nº 379. Siendo eso así, se tiene:

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}b^3 + \dots$$

Para obtener el desarrollo de $(a+b)^{m+1}$ basta multiplicar el resultado anterior por $(a+b)$. Así, se obtiene:

$$a^{m+1} + \frac{m}{1}a^m b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-1}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-2}b^3 + \dots$$
$$+ \quad a^m b + \quad \frac{m}{1}a^{m-1}b^2 + \quad \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^3 + \dots$$

Redúzcanse los términos semejantes:

$$a^{m+1} + \frac{(m+1)}{1}a^m b + \left[\frac{m(m-1)}{1\cdot 2} + \frac{m}{1}\right]a^{m-1}b^2 + \left[\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\right]a^{m-2}b^3 + \dots$$

Efectúense las operaciones indicadas en los paréntesis rectangulares:

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + \frac{(m+1)}{1}a^m b + \frac{(m+1)m}{1\cdot 2}a^{m-1}b^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-2}b^3 + \dots$$

Por este resultado se ve que el desarrollo del binomio $(a+b)^{m+1}$ se obtiene conforme a la misma ley de formación que el desarrollo de $(a+b)^m$, puesto que en vez de la literal m de éste (ya sea que figure en los diferentes exponentes o en los coeficientes) aparece $(m+1)$ en aquél.

Dedúcese de ahí que si la regla enunciada es válida para un exponente m cualquiera, entero y positivo, lo es igualmente para el mismo exponente aumentado en 1.

Así, por multiplicación se ha visto que la citada regla se aplica al caso de un exponente $m=5$, y por demostración, que se aplica también al caso de un exponente $m+1=5+1=6$.

Siendo verdadera para la sexta potencia, lo es también para la séptima, y así sucesivamente.

Nota. — Con el objeto de abreviar, los productos $1\cdot 2$, $1\cdot 2\cdot 3$, $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$, etc., suelen representarse por $2!$, $3!$, $4!$..... $n!$, que se leen, respectivamente, *factorial* 2, *factorial* 3... *factorial* n.

382. Fórmula general del binomio. De todo lo expuesto puédese deducir que la regla dada para la formación de los términos del desarrollo de la potencia enésima de un binomio es general para un exponente cualquiera n, entero y positivo.

Se tiene, entonces, como fórmula general:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}a^{n-4}b^4 + \dots$$

383. Aplicaciones. Desarrollar: $\left(m^2-\frac{1}{m}\right)^7$ y $(3x^2+\sqrt{m})^4$.

$$\left(m^2-\frac{1}{m}\right)^7 = (m^2)^7 + \frac{7}{1}(m^2)^6\left(-\frac{1}{m}\right) + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}(m^2)^5\left(-\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}(m^2)^4\left(-\frac{1}{m}\right)^3 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(m^2)^3\left(-\frac{1}{m}\right)^4 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(m^2)^2\left(-\frac{1}{m}\right)^5 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}(m^2)\left(-\frac{1}{m}\right)^6 + \left(-\frac{1}{m}\right)^7;$$

$$\left(m^2-\frac{1}{m}\right)^7 = m^{14} - 7m^{11} + 21m^8 - 35m^5 + 35m^2 - \frac{21}{m} + \frac{7}{m^4} - \frac{1}{m^7}.$$

$$(3x^2+\sqrt{m})^4 = (3x^2)^4 + 4(3x^2)^3\left(m^{\frac{1}{2}}\right) + 6(3x^2)^2\left(m^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 4(3x^2)\left(m^{\frac{1}{2}}\right)^3 + \left(m^{\frac{1}{2}}\right)^4;$$

$$(3x^2+\sqrt{m})^4 = 81x^8 + 108x^6 m^{\frac{1}{2}} + 54x^4 m + 12x^2 m^{\frac{3}{2}} + m^2.$$

384. Término de orden r o término general. Puede obtenerse una regla fácil para calcular el término de orden r del desarrollo de un binomio.

Si en algunos de los precedentes desarrollos se observa un término cualquiera, el quinto por ejemplo, se nota que:

el exponente de a es $n-4$,
el exponente de b es 4,
el denominador es 4!.

Por tanto, teniendo presente que $4=5-1$, el término de orden r del desarrollo de $(a+b)^n$ es:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots \text{hasta } (r-1) \text{ factores}}{(r-1)!}\, a^{n-(r-1)}b^{r-1}.$$

385. **Aplicaciones.** 1º ¿Cuál es el sexto término del desarrollo de $(a+b)^9$?

Sexto término $=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,a^{9-5}b^5=126a^4b^5$.

2º ¿Cuál es el cuarto término del desarrollo de $(m+2x)^{11}$?

Cuarto término $=\frac{11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3}\,m^{11-3}(2x)^3=1\,320m^8x^3$.

EJERCICIO 75

Desarrollar, aplicando la fórmula general del binomio.

1. $(a+b)^6$.
2. $(a-b)^6$.
3. $(2a-5b)^5$.
4. $(c^2-2c)^6$.
5. $(m-n)^9$.
6. $(a-2)^8$.
7. $(x-3n)^7$.
8. $(a^{2m}-c^n)^5$.
9. $(x^{-2}-n^2)^4$.
10. $(2m-x^{-3})^6$.
11. $\left(a+\frac{1}{a}\right)^8$.
12. $\left(\frac{x^2}{z}+\frac{z}{x}\right)^4$.
13. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^6$.
14. $\left(\sqrt[3]{m^2}-\frac{1}{3m}\right)^5$.
15. $(2m-\sqrt[3]{m^4})^8$.
16. $(\sqrt[5]{n^4}+3)^5$.
17. $(\sqrt{x^3}+4\sqrt[3]{a})^4$.
18. $\left(m^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^5$.
19. $\left(x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{x}\right)^7$.
20. $\left(3\sqrt{\frac{x}{m}}-5\sqrt{\frac{m}{x}}\right)^4$.
21. Calcúlese el cuarto término de $(m+n)^8$ y de $(m-n)^8$.
22. ¿Cuál es el quinto término del desarrollo de $(2x+3y)^{10}$?
23. Calcúlese el noveno término de $(m+1)^{11}$.
24. Hállese el sexto término del desarrollo de $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^8$.
25. ¿Cuál es el séptimo término de $(a^{-2}+a^2)^{10}$?
26. Hállese el sexto término del desarrollo de $\left(a^{-3}+\frac{ab}{2}\right)^9$.
27. ¿Cuál es el noveno término de $(m^2-n^3)^{12}$?

28. Obténgase el quinto término de $\left(n^{\frac{3}{4}}+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^7$.
29. Calcúlese el sexto término de $\left(x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{x^2}\right)^7$.
30. Calcúlese el término medio del desarrollo de $(2x+3m)^8$.
31. Hallar el término medio de $(2a-3b)^{12}$.
32. ¿En qué término son iguales los exponentes de a y de b en el desarrollo de $(a+b)^{12}$.

III. GENERALIZACION DE LA FORMULA DEL BINOMIO

386. Caso de un exponente negativo o fraccionario. La fórmula general para desarrollar el binomio $(a+b)^n$ se aplica también al caso en que el exponente es *fraccionario* o *negativo*, siempre que se tenga $a>b$.

Se debe a Newton el haber hecho extensivo a los exponentes fraccionarios y negativos el método expuesto para el desarrollo de un binomio, así como la regla para la formación de los coeficientes de los términos de dicho desarrollo. Por eso el nombre de este ilustre matemático inglés va unido con el del binomio.

En estos dos casos, o sea, cuando el exponente es fraccionario o negativo, *el desarrollo tiene un número ilimitado de términos.*

387. Aplicaciones. 1º Obténganse los cuatro primeros términos del desarrollo de $(m+n)^{\frac{2}{3}}$.

$$(m+n)^{\frac{2}{3}}=m^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}m^{-\frac{1}{3}}n+\frac{1}{2!}\times\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)m^{-\frac{4}{3}}n^2+\frac{1}{3!}\times\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)m^{-\frac{7}{3}}n^3+\ldots$$

$$(m+n)^{\frac{2}{3}}=m^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}m^{-\frac{1}{3}}n-\frac{1}{9}m^{-\frac{4}{3}}n^2+\frac{4}{81}m^{-\frac{7}{3}}n^3-\ldots$$

2º Calcular los cuatro primeros términos del desarrollo de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1^{-\frac{1}{2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)1^{-\frac{3}{2}}(-x)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)1^{-\frac{5}{2}}x^2+\frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)1^{-\frac{7}{2}}(-x)^3+\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\frac{5x^3}{16}+\ldots$$

388. Extracción de raíces por medio del binomio. Puede aplicarse a la extracción de raíces el desarrollo del binomio.

Sea extraer la raíz $\sqrt[m]{1+a}=(1+a)^{\frac{1}{m}}$.

Desarrollando según la fórmula general, se tiene:

$$(1+a)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}a + \frac{1}{2!}\times\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)a^2 + \frac{1}{3!}\times\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)a^3 + \ldots$$

$$(1+a)^{\frac{1}{m}} = 1+\frac{1}{m}a-\frac{1}{2!}\times\frac{m-1}{m^2}a^2+\frac{1}{3!}\times\frac{(m-1)(2m-1)}{m^3}a^3-\ldots$$

389. Aplicaciones. La fórmula anterior permite extraer la raíz emésima de un número cualquiera. Basta, para ello, descomponer el número en dos sumandos, tales que el primero sea la mayor potencia perfecta del orden de la raíz, y poner luego dicha potencia en factor común.

Ejemplos: 1º Calcular $\sqrt{30}$ con 4 decimales.

$$\sqrt{30} = \sqrt{25+5} = \sqrt{25\left(1+\frac{5}{25}\right)} = 5\sqrt{1+\frac{1}{5}} = 5\left(1+\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 5\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}-\frac{1}{2!}\times\frac{1}{2^2}\times\frac{1}{5^2}+\frac{1}{3!}\times\frac{1\times3}{2^3}\times\frac{1}{5^3}-\ldots\right)$$
$$= 5(1+.1-.005+.0005-\ldots) = 5.4775\ldots$$

2º Calcular $\sqrt[3]{39}$ con 4 decimales.

$$\sqrt[3]{39} = \sqrt[3]{27+12} = \sqrt[3]{27\left(1+\frac{12}{27}\right)} = 3\sqrt[3]{1+\frac{4}{9}} = 3\left(1+\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= 3\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}-\frac{1}{2!}\times\frac{2}{3^2}\times\frac{4^2}{9^2}+\frac{1}{3!}\times\frac{2\times5}{3^3}\times\frac{4^3}{9^3}-\ldots\right)$$
$$= 3(1+.1481-.0219+.0054-\ldots) = 3.3948\ldots$$

EJERCICIO LXXVI

Calcúlense los cinco primeros términos del desarrollo de las siguientes expresiones:

1. $(a+b)^{\frac{1}{2}}$.
2. $(1+a)^{-5}$.
3. $(1-m)^{-\frac{4}{3}}$.
4. $\sqrt{3m-n}$.
5. $\dfrac{1}{(m-n)^3}$.
6. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+m}}$.
7. $\left(m^{\frac{1}{3}}-2n\right)^{-\frac{3}{2}}$.
8. $\left(a^4-2b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$.
9. $\dfrac{1}{(m^2+4n)^2}$.
10. $\dfrac{1}{\sqrt{2x+z}}$.
11. $\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^{-\frac{2}{3}}$.
12. $\left(\frac{m^2}{n}-\frac{n^2}{m}\right)^{-2}$.

Calcúlense, con 4 decimales, las siguientes raíces:

13. $\sqrt{15}$.
14. $\sqrt{27}$.
15. $\sqrt{11}$.
16. $\sqrt[3]{68}$.
17. $\sqrt[3]{9}$.
18. $\sqrt[3]{67}$.
19. $\sqrt[4]{17}$.
20. $\sqrt[5]{33}$.

IV. TRIANGULO DE PASCAL

390. Otra manera de calcular los coeficientes. Los coeficientes de los términos del desarrollo del binomio $(a+b)^n$, según el cálculo directo, son:

para $n=1$, 1, 1;
para $n=2$, 1, 2, 1;
para $n=3$, 1, 3, 3, 1;
. . . . . .

Pascal observó que, dado el desarrollo de una potencia cualquiera del binomio $(a+b)$, por ejemplo,

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

si se multiplica por $a+b$ se obtiene:

$$\begin{array}{r} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ a+b \\ \hline a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\ +a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ \hline (a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \end{array}$$

en que *el coeficiente de un término cualquiera es igual a la suma de dos coeficientes: el del término situado inmediatamente arriba y el del que precede a éste, o sea:*

$$1;\quad 1+3=4;\quad 3+3=6;\quad 3+1=4;\quad 1.$$

Puede comprobarse, por medio de nuevas multiplicaciones, que este principio es general para cualquier potencia del binomio $(a+b)$, pues los coeficientes de los términos del primer producto parcial se repiten en el mismo orden en el segundo, pero con desplazamiento de un lugar hacia la derecha. Se deduce de esto que pueden escribirse inmediatamente los coeficientes de los términos del desarrollo de la potencia inmediata superior a otra cuyos coeficientes hayan sido calculados ya.

Así, los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^5$ son:

$$1;\quad 1+4=5;\quad 4+6=10;\quad 6+4=10;\quad 4+1=5;\quad 1.$$

El cálculo de estos coeficientes puede abreviarse, teniendo presente que los coeficientes de dos términos que equidistan de los extremos son iguales.

Aplicando todo lo dicho, se forma el siguiente triángulo, llamado *Triángulo de Pascal:*

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
  1   7  21  35  35  21   7   1
1   8  28  56  70  56  28   8   1
```

En este triángulo se tienen, a simple vista, ya calculados los coeficientes de los términos del desarrollo de las diferentes potencias del binomio $(a+b)$ desde 0 hasta 8 inclusive.

A veces se disponen los coeficientes de tal manera que se obtiene un triángulo isósceles, como se ve a continuación.

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
  1   7  21  35  35  21   7   1
1   8  28  56  70  56  28   8   1
```

Notas. — 1ª La disposición de los coeficientes en forma de triángulo isósceles, es más antigua que la ideada por Pascal.

2ª En este triángulo se ve que un término cualquiera de un renglón (excepción hecha de los extremos), es la suma de los términos del renglón inmediato anterior, entre los cuales está escrito.

EJERCICIO 77

Aprovechando el triángulo de Pascal, desarróllese:

1. $(a+b)^6$.
2. $(m+n)^7$.
3. $(c+d)^8$.
4. $(2a+c)^6$.
5. $(2x^2-3z)^5$.
6. $\left(p+\frac{q}{2}\right)^6$.
7. $\left(2r-\frac{s}{2}\right)^7$.
8. $(2x-3y^2)^5$.
9. Continuar el triángulo de Pascal hasta la 12ª potencia inclusive.

CUARTA PARTE

PROGRESIONES Y LOGARITMOS

1

PROGRESIONES ARITMETICAS

I. DEFINICIONES Y FORMULAS

391. Progresión. Considérense las siguientes sucesiones de números:

3, 5, 7, 9, 11, ... ; (1)

1, 3, 9, 27, 81, ... (2)

En la (1) cada número es igual al que le precede *aumentado* en 2; en la (2) cada número es igual al inmediato anterior *multiplicado* por 3.

392. Clasificación de las progresiones. Las progresiones pueden ser *aritméticas* o por diferencia, y *geométricas* o por cociente.

Así, la (1) es una progresión aritmética y la (2) es una progresión geométrica.

393. Progresión aritmética. *Progresión aritmética es una sucesión de términos, cada uno de los cuales es igual al que le precede, más un número llamado razón o diferencia común;* v. gr.:

45, 42, 39, 36, 33,... (3)

En la progresión (1) la razón o diferencia es $5-3=2$ y en la progresión (3), la razón es $42-45=-3$.

394. Progresión creciente, decreciente. Progresión aritmética *creciente* es aquella cuya razón es *positiva*.

Progresión aritmética *decreciente* es aquella cuya razón es *negativa*.

La progresión (1) es creciente y la (3) es decreciente.

395. Notación. *Si* $a, b, c, d, \ldots i, h, k, l$, son un número determinado de términos de una progresión aritmética, y r es la razón, la progresión puede escribirse.

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r\ \ldots\ l-3r,\ l-2r,\ l-r,\ l.$$

396. Enésimo término. Sea la progresión formada de n términos:

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r,\ a+4r,\ a+5r,\ \ldots\ l.$$

Se ve que, en cada término, el coeficiente de r es igual al número de términos que le preceden; por tanto, si l es el enésimo término, le preceden $(n-1)$ términos y su valor es:

$$l = a + (n-1)r. \qquad (1)$$

Por tanto: *El enésimo término de una progresión aritmética es igual al primero, más el producto de la razón por el número de términos que hay en la progresión, menos* 1.

397. Otras fórmulas. De la fórmula (1) se deducen las siguientes:

$$a = l - (n-1)r. \qquad (2)$$

$$r = \frac{l-a}{n-1}. \qquad (3)$$

$$n = \frac{l-a}{r} + 1. \qquad (4)$$

398. Suma de los términos. Sea la progresión aritmética

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r,\ \ldots\ l-3r,\ l-2r,\ l-r,\ l.$$

Llamando S la suma de los términos se tiene:

$$S = a + (a+r) + (a+2r) + \ \ldots\ + (l-2r) + (l-r) + l.$$

Invirtiendo el orden de los sumandos:

$$S = l + (l-r) + (l-2r) + \ \ldots\ + (a+2r) + (a+r) + a.$$

Sumando estas dos igualdades miembro a miembro:

$$2S = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \ \ldots\ + (a+l) + (a+l) + (a+l).$$

El 2º miembro consta de n sumandos iguales a $(a+l)$; luego:

$$2S = (a+l)n,$$

$$S = \frac{a+l}{2}n. \qquad (5)$$

De donde: *La suma de un número finito de términos de una progresión aritmética es igual a la semisuma de los términos extremos, multiplicada por el número de términos.*

399. Observación. Si en la fórmula anterior se sustituye l por su valor sacado de (1), se obtiene:

$$S = \frac{[a+a+(n-1)r]n}{2},$$

$$S = \left[a + \frac{r}{2}(n-1)\right]n. \qquad (6)$$

Esta fórmula permite calcular la suma sin necesidad de conocer el enésimo término.

400. Interpolación de medios aritméticos. *Interpolar* m *medios aritméticos entre* a *y* b, *es formar una progresión aritmética de* $m+2$ *términos, que tenga por extremos* a *y* b.

EJEMPLO: Interpolar 9 medios aritméticos entre 8 y 38.

La progresión que se busca debe tener $9+2=11$ términos, de los que el primero es 8 y el último 38.

La razón es, según la fórmula (3):

$$r = \frac{38-8}{11-1} = \frac{30}{10} = 3.$$

La progresión pedida es, por tanto:

8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38.

II. APLICACION DE LAS FORMULAS

401. Cálculo de los diversos elementos. Si de los elementos a, l, n, r y S se conocen tres, se pueden calcular los dos restantes, sustituyendo los valores dados en las fórmulas obtenidas.

402. Cálculo de l y de S. 1º ¿Cuáles son el duodécimo término y la suma de los 12 primeros términos de la progresión 8, 5, 2, ...?

En este caso, $a=8$, $r=-3$, $n=12$.

Sustituyendo en (1), se obtiene:

$$l = 8 + (12 - 1)(-3) = 8 - 33 = -25.$$

Sustituyendo en (5):

$$S = \frac{8 - 25}{2} \times 12 = -17 \times 6 = -102.$$

2º ¿Cuáles son el vigésimo término y la suma de los 20 primeros términos de la progresión 14, 64, 114 ...?

$$l = 14 + (20 - 1) \times 50 = 14 + 950 = 964.$$

$$S = \frac{14 + 964}{2} \times 20 = 9\,780.$$

3º Calcular la suma de los 8 primeros términos de la progresión $-5, -1, 3 \ldots$

Aplicando la fórmula (6), se tiene:

$$S = (-5 + 2 \times 7)8 = 72.$$

EJERCICIO 78

1. Formar una progresión de 8 términos, que tenga 10 como razón y cuyo primer término sea 93.

2. Formar una progresión de 8 términos, que tenga 1 000 como primer término y la razón sea -75.

Agréguense 5 términos a cada una de las progresiones siguientes:

3. $2, 7, 12, \ldots$
4. $3, 1, -1, \ldots$
5. $2\sqrt{a}, 5\sqrt{a}, 8\sqrt{a}, \ldots$
6. $-5\sqrt{x}, -2\sqrt{x}, \sqrt{x}, \ldots$

Escríbanse los 5 primeros términos de la progresión en que:

7. $a = \frac{3}{2}, \quad r = \frac{5}{2}$.
8. $a = 39, \quad r = -7$.
9. $a = x - 3y, \quad r = 2y$.
10. $a = x, \quad r = x + 1$.

Calcular el enésimo término y la suma de los términos de las progresiones:

11. $5, 9, 13, \ldots$ (16 términos).
12. $12, 9, 6, \ldots$ (20 términos).
13. $-7, -12, -17, \ldots$ (16 términos).
14. $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \ldots$ (20 términos).
15. $x, 2x + 1, 3x + 2, \ldots$ (15 términos).

16. $4\sqrt{3}, \sqrt{3}, -2\sqrt{3}, \ldots$ (10 términos).
17. $2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 2 - 3\sqrt{3}, \ldots$ (10 términos).

18. El primer término de una progresión es -50 y la razón es 10. Hallar el 21er término.

Calcular la suma de los 10 primeros términos de las progresiones siguientes:

19. $25, 33, 41, \ldots$
20. $99, 90, 81, \ldots$
21. $4, 11, 18, \ldots$
22. $1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$

APLICACION DE LAS FORMULAS

(Continuación).

403. Cálculo de un elemento cualquiera. 1º Dados $a = -5$, $n = 19$, $l = -95$, calcular S y r.

Sustitúyanse los valores en (5):

$$S = \frac{-5 + (-95)}{2} \times 19 = -950.$$

Sustituyendo ahora en (3):

$$r = \frac{-95 + 5}{18} = \frac{-90}{18} = -5.$$

2º Dados $l = 6$, $r = \frac{5}{6}$, $S = 24$, hallar n y a.

Sustitúyanse primero en (1) los valores dados:

$$6 = a + (n - 1)\frac{5}{6}.$$

Despéjese a:

$$a = \frac{41 - 5n}{6}.$$

Sustitúyase a en (5):

$$24 = \frac{n}{2}\left(\frac{41 - 5n}{6} + 6\right) = \frac{41n}{12} - \frac{5n^2}{12} + \frac{6n}{2}.$$

Désele forma entera y redúzcase:

$$5n^2 - 77n + 288 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación, se obtiene:

$$n = \frac{77 \pm 13}{10}; \quad n_1 = 9, \quad n_2 = 6.4.$$

Como n debe ser entero, sólo satisface el valor 9.

El valor de a es, pues: $a = \frac{41-45}{6} = -\frac{2}{3}$.

3º Dados $a = \frac{15}{2}$, $r = -\frac{3}{4}$, $S = \frac{135}{4}$, calcúlense l y n.

Sustitúyanse en (1) los valores dados:

$$l = \frac{15}{2} + (n-1)\left(-\frac{3}{4}\right),$$

$$l = \frac{33-3n}{4}.$$

Sustitúyase l en (5):

$$\frac{135}{4} = \frac{n}{2}\left(\frac{15}{2} + \frac{33-3n}{4}\right),$$

o sea: $$270 = 30n + 33n - 3n^2.$$

Resolviendo esta ecuación, se obtiene:

$$n = \frac{21 \pm 9}{2}; \quad n_1 = 15, \quad n_2 = 6.$$

Los valores correspondientes de l son:

$$l_1 = -3, \quad l_2 = \frac{15}{4}.$$

Si $n = 15$, el término $l = -3$, y si $n = 6$, el valor del término l es $\frac{15}{4}$.

EJERCICIO 79

1. Calcular r, dados $a = 10$, $l = 78$, $n = 12$.
2. Dados $a = 23$, $l = 28.5$, $n = 12$, calcúlese r.
3. Interpolar 6 medios aritméticos entre 20 y 195.
4. Interpolar 8 medios aritméticos entre -10 y -28.
5. Interpolar un medio aritmético entre 4 y $12\frac{1}{2}$
6. Interpolar 10 medios aritméticos entre -18 y 103.
7. Interpolar 4 medios aritméticos entre a y b.
8. Interpolar 5 medios aritméticos entre $\sqrt{a}+3$ y $25\sqrt{a}+27$.

9. Dados $a = 4$, $l = 94$, $r = 6$, calcúlese n.
10. Dados $n = 34$, $l = 9$, $r = -17$, calcúlese a.
11. La progresión 67, 61, ...1, ¿de cuántos términos consta y cuál es la suma de ellos?
12. Dados $n = 17$, $l = 2$, $r = -13$, calcúlese a.
13. Dados $S = 336$, $a = 37$, $l = 11$, calcúlense n y r.
14. El quinto término de una progresión aritmética es $7 - 11\sqrt{6}$, y el octavo es $13 - 20\sqrt{6}$. Calcúlese el doceavo término.
15. Hallar los tres primeros términos de una progresión aritmética en la cual el tercer término es $3\,^1/_4$ y el séptimo es $5\,^1/_2$.

Calcular l y r, sabiendo que:

16. $a = 7$, $n = 14$, $S = 826$. 17. $a = 210$, $n = 17$, $S = 1\,802$.

Calcular a y n, sabiendo que:

18. $r = 8$, $l = 97$, $S = 610$. 19. $r = -\frac{1}{15}$, $l = -\frac{3}{5}$, $S = 0$.

Calcular r y n, sabiendo que:

20. $a = 1$, $l = \frac{11}{2}$, $S = 32.5$. 21. $a = -\frac{5}{2}$, $l = -\frac{23}{2}$, $S = -91$.

APLICACION DE LAS FORMULAS
(Continuación).

404. Ejemplos de problemas. 1º Hallar la suma de los n primeros números naturales, para $n = 100$.

Esos números forman la siguiente progresión de n términos:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \ldots n,$$

cuya suma es: $$S = \frac{1+n}{2}n.$$

La suma de los 100 primeros números naturales es, pues:

$$S = \frac{1+100}{2} \times 100 = 5\,050.$$

2º ¿Cuál es la suma de los n primeros números impares?

Aplicación numérica: $n = 100$.

Esos números impares forman la siguiente progresión de n términos:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \ldots n,$$

cuya suma es, según la fórmula (6):

$$S = \left[a + \frac{r}{2}(n-1)\right] n = \left[1 + \frac{2}{2}(n-1)\right] n = n^2.$$

Así, la suma de los 100 primeros números impares es:

$$S = n^2 = 100^2 = 10\,000.$$

3º Un oficial dispone de 3 321 soldados. Los forma en triángulo de manera que la primera fila tenga 1 soldado, la segunda 2, la tercera 3, la cuarta 4, y así sucesivamente. ¿Cuántas filas habrá?

Sea l el número de soldados de la última fila, l representa también el número de filas. Se tiene pues la progresión

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \ldots l,$$

cuya suma es: $$S = \frac{1+l}{2}\, l.$$

De ahí la ecuación $$\frac{(1+l)l}{2} = 3\,321,$$

o bien, $$l^2 + l - 6\,642 = 0,$$

cuya raíz aceptable es 81.

Luego, el triángulo tiene 81 filas.

EJERCICIO 80

1. Calcular la suma de todos los números pares comprendidos entre 1 045 y 7 351.

2. ¿Cuántos múltiplos de 7 hay entre 1 000 y 10 000? Hallar su suma.

3. ¿Cuántos son los múltiplos de 11 cuyo valor es inferior a 1 000?

4. Un reloj da las horas sin repetición y un toque por cada media, ¿cuántos toques da cada día?

5. Un reloj da las horas con repetición; da también los cuartos con un toque, las medias con 2 y los tres cuartos con 3. ¿Cuántos toques da al día?

6. Un oficial coloca a sus hombres en forma de triángulo, poniendo uno en la primera fila, 2 en la segunda, 3 en la tercera y así sucesivamente. Sabiendo que el triángulo contiene 231 soldados, se pregunta cuántos hay en la última fila.

7. Los ángulos de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética; ¿cuáles son esos ángulos?

8. ¿Cuántos términos hay que tomar en la progresión

$$13,\ 21,\ 29,\ 37\ \ldots$$

para que su suma sea 490?

9. Hallar 6 números en progresión aritmética, sabiendo que el primero de esos números es 4.5 y que la suma de sus términos es 19.50.

10. Hallar 4 números en progresión aritmética tales que la razón sea 20, y el producto de los extremos 61.

11. Tres obreros perforaron un pozo de 27 m. Por el primer metro les pagan \$ 100 por el 2º \$ 115, por el 3º \$ 130, y así sucesivamente. ¿Cuánto cobra cada uno, si los tres reciben sueldos iguales?

12. Un empleado ganó, por sueldos, \$ 33 500 en 10 años. Sabiendo que el primer año le dieron \$ 2 000, y que cada año le aumentaron en igual cantidad, ¿cuál fué el aumento anual?

13. Un cuerpo, que resbala en un plano inclinado, recorre 5 pies en el primer segundo, y su velocidad aumenta en 10 pies por segundo. ¿Cuánto habrá resbalado en 8 segundos?

14. Un proyectil fué arrojado verticalmente en tal forma que en el primer segundo recorrió 1 000 pies, y luego su velocidad fué disminuyendo a razón de 32 pies por segundo. ¿A qué altura se hallaba al cabo de 12 segundos? ¿Qué distancia recorrió en el doceavo segundo? ¿y en el segundo 40? ¿Qué significa el signo de este último resultado?

15. Cierto número está formado de tres dígitos, en progresión aritmética, y los tres suman 15. El número es igual al producto del dígito de las centenas por 129. ¿Cuál es el número?

16. El primer término de una progresión aritmética es 3. La razón del noveno término al cuarto es igual a la razón del décimosexto al séptimo. Hállese la progresión.

17. Se han colocado 20 objetos en línea recta, y a 1 m de distancia uno de otro. Un corredor sale de un punto de partida que dista 1 m del primer objeto; toma éste y lo lleva al punto de partida, y hace otro tanto con cada uno de los objetos restantes. ¿Cuántos metros tendrá que recorrer en total?

2

PROGRESIONES GEOMETRICAS

I. DEFINICIONES Y FORMULAS

405 Progresión geométrica. *Progresión geométrica es una sucesión de términos, cada uno de los cuales es igual al que le precede, multiplicado por una constante llamada razón.*

Así, las dos sucesiones de números

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162.\ 486; \qquad (1)$$

$$128,\ 64,\ 32,\ 16,\ 8,\ 4, \qquad (2)$$

son *progresiones geométricas.*

En la primera la razón es $6:2=3$, y en la segunda, $64:128=\frac{1}{2}$.

406. Progresión creciente, decreciente. Progresión geométrica *creciente* es aquella cuya razón es *mayor que* 1, y *decreciente* aquella cuya razón es *menor que* 1.

Así, la progresión (1) es creciente, y la (2) es decreciente.

407. Notación. Si $a, b, c, d, e, f \ldots$, son los términos de una progresión geométrica, y r la razón, puede escribirse:

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ ar^5,\ \text{etc.}$$

408. Enésimo término. Sea la progresión, formada de n términos,

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ ar^5,\ \ldots\ l.$$

Se ve que, en cada término, el exponente de r es igual al número de términos que le preceden; por tanto, si l es el enésimo término, le preceden $(n-1)$ términos, y su valor es:

$$l = ar^{n-1}. \qquad (1)$$

Luego: *El enésimo término de una progresión geométrica es igual al primero multiplicado por la razón elevada a una potencia cuyo exponente es igual al número de términos menos* 1.

409. Otras fórmulas. De la fórmula (1) se deducen las siguientes:

$$a = \frac{l}{r^{n-1}}. \qquad (2)$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}. \qquad (3)$$

410. Suma de los términos. Sea la progresión

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ \ldots\ ar^{n-3},\ ar^{n-2},\ ar^{n-1}.$$

Llamando S la suma de los términos, se tiene:

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ \ldots\ + ar^{n-3} + ar^{n-2} + ar^{n-1}.$$

Multiplíquense ambos miembros por r:

$$Sr = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ \ldots\ + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n.$$

Réstese la primera igualdad de la segunda y despéjese S:

$$Sr - S = ar^n - a; \qquad S(r-1) = ar^n - a.$$

$$S = \frac{ar^n - a}{r-1}. \qquad (4)$$

De donde: *Para obtener la suma de* n *términos de una progresión geométrica, réstese el primer término del que sigue al enésimo, y divídase la diferencia entre la razón menos* 1.

411. Observaciones. 1ª El término ar^n de la fórmula anterior puede escribirse

$$ar^n = ar^{n-1} \times r = lr.$$

Por tanto (4), puede escribirse, a su vez:

$$S = \frac{lr - a}{r-1}. \qquad (5)$$

2ª Si en (4) se pone a en factor, resulta:

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}. \qquad (6)$$

3ª Cuando la progresión es decreciente, se tiene $r < 1$, y también $r^n < 1$; por tanto, $r^n - 1$ y $r - 1$ son negativos. Multiplicándolos por (-1), se obtiene:

$$S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}. \qquad (7)$$

O bien, sustituyendo ar^n por lr:

$$S = \frac{\epsilon - lr}{1 - r}. \qquad (8)$$

4ª Las fórmulas (6) y (7) permiten calcular la suma sin necesidad de conocer el enésimo término.

412. **Producto de los términos.** Sea la progresión

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \ldots\ ar^{n-3},\ ar^{n-2},\ ar^{n-1}.$$

Llamado P el producto de los n primeros términos, se tiene:

$$P = a \times ar \times ar^2 \times ar^3 \times \ldots \times ar^{n-3} \times ar^{n-2}\, ar^{n-1}.$$

Invirtiendo el orden de los factores:

$$P = ar^{n-1} \times ar^{n-2} \times ar^{n-3} \times \ldots \times ar^3 \times ar^2 \times ar \times a.$$

Multiplíquense miembro a miembro estas dos igualdades, agrupando de dos en dos los factores equidistantes de los extremos:

$$P^2 = (a \times ar^{n-1})(ar \times ar^{n-2}) \ \ldots\ (ar^{n-2} \times ar)(ar^{n-1} \times a)$$
$$= (a \times ar^{n-1})^n = a^{2n} r^{n(n-1)}.$$

Extráigase la raíz cuadrada:

$$P = \sqrt{a^{2n} r^{n(n-1)}} = a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}. \qquad (9)$$

II. APLICACION DE LAS FORMULAS

413. **Cálculo de los diversos elementos.** Lo mismo que en las progresiones aritméticas, si de los 5 elementos a, n, r, l y S de una progresión geométrica se conocen 3, se pueden calcular los dos restantes, sustituyendo los valores dados en las fórmulas obtenidas.

En ciertos casos esta operación lleva a una ecuación de grado superior al segundo; en otros, la incógnita figura como exponente y su valor, en general, sólo se puede calcular por medio de los logaritmos, de los que se tratará en el capítulo siguiente.

Los ejemplos que se van a exponer son tales que las ecuaciones a que dan lugar pueden resolverse sin logaritmos, como se ve a continuación.

414. **Cálculo de l y S.** 1º Hallar el séptimo término de la progresión

$$3,\ 9,\ 27,\ \ldots$$

En este caso, $a = 3$, $r = 3$, y $n = 7$.

Sustituyendo en (1), se obtiene:

$$l = 3 \times 3^6 = 3^7 = 2\,187.$$

2º Hallar el octavo término de la progresión

$$-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ -\frac{3}{4},\ \ldots$$

Aquí, $a = -\frac{1}{3}$, $n = 8$, $r = \frac{1}{2} : \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{2}$.

Sustituyendo, como en el caso anterior, resulta:

$$l = -\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)^7 = -\frac{1}{3}\left(-\frac{2\,187}{128}\right) = \frac{729}{128}.$$

3º Hallar la suma de los 6 primeros términos de la progresión

$$1,\ 3,\ 9,\ \ldots$$

En este caso, $a = 1$, $n = 6$, $r = 3$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula (4) se obtiene:

$$S = \frac{1 \times 3^6 - 1}{3 - 1} = \frac{729 - 1}{2} = 364.$$

4º Calcular la suma de los 9 primeros términos de la progresión

$$81,\ 54,\ 36,\ \ldots$$

En esta progresión $a = 81$, $n = 9$, $r = 54 : 81 = \frac{2}{3}$.

Sustitúyanse estos valores en la fórmula (7):

$$S = \frac{81\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^9\right]}{1 - \frac{2}{3}} = 243\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^9\right] = 236\,\frac{55}{81}.$$

EJERCICIO 81

1. Formar una progresión geométrica de 6 términos, con $a = 2$, $r = 3$.

2. Escríbanse los 5 primeros términos de la progresión geométrica cuyo primer término es $-\frac{1}{2}$ y la razón es (-4).

3. Decir si la progresión $\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6}, \ldots$ es eométrica o aritmética.

En las progresiones siguientes, calcúlese el enésimo término y la suma de los términos que se indican.

4. $1,\ 4,\ 16,\ \ldots$ (6 términos).

5. $-2,\ 10,\ -50,\ \ldots$ (5 términos).

6. 25, 10, 4, ... (6 términos).

7. 6, 4, $\frac{8}{3}$, ... (7 términos).

8. 3, -1, $\frac{1}{3}$, ... (6 términos).

9. $-\frac{3}{4}$, 3, -12, ... (6 términos).

10. Calcúlese el sexto término de la progresión $2+\sqrt{3}$, 1, $2-\sqrt{3}$, ...

11. Calcúlese el séptimo término de la progresión 2, $2\sqrt{2}$, 4, ...

12. Calcúlese el décimo término de la progresión a^0, $a^{\frac{4}{3}}$, $a^{\frac{8}{3}}$, ...

13. Dada la progresión geométrica a, b, c, d, ... i, h, k, l, de razón r, exprésense los términos i, h, k en función de l y de r.

14. Hallar el producto de los 6 primeros términos de la progresión 2, 2^2, 2^3, ...

15. Calcular el producto de los 5 primeros términos de la progresión 4, 6, 9, ...

16. Igual pregunta para la progresión $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{2}$, 10, ...

APLICACION DE LAS FORMULAS

(Continuación).

415. Cálculo de un elemento cualquiera. **1º Sabiendo que** $r=2$, $n=8$, $l=1\,280$, **hallar** a **y** S.

Sustitúyanse los valores dados en (2):

$$a=\frac{1\,280}{2^7}=\frac{1\,280}{128}=10.$$

Para obtener S, sustitúyanse valores en (5):

$$S=\frac{1\,280\times 2-10}{2-1}=2\,550.$$

2º Sabiendo que $n=7$, $a=2$, $l=31\,250$, **hallar** r **y** S.

Sustitúyanse los valores dados en (3):

$$r=\sqrt[6]{\frac{31\,250}{2}}=\sqrt[6]{15\,625}=\sqrt[6]{5^6}=5.$$

Para obtener S, sustitúyanse valores en (5):

$$S=\frac{31\,250\times 5-2}{5-1}=39\,062.$$

3º Sabiendo que $a=\frac{3}{4}$, $r=-\frac{1}{3}$, $S=\frac{91}{162}$, **hallar** l **y** n.

Sustitúyase en (5): $\frac{91}{162}=\frac{-\frac{1}{3}l-\frac{3}{4}}{-\frac{1}{3}-1}=\frac{4l+9}{16}$;

de donde: $l=-\frac{1}{324}$.

Para calcular n aplíquese la fórmula (1).

Se tiene: $-\frac{1}{324}=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Divídase entre $\frac{3}{4}$: $-\frac{1}{243}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$;

o bien: $\left(-\frac{1}{3}\right)^5=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$;

de donde: $n-1=5$, y $n=6$.

EJERCICIO 82

Calcular a y S, sabiendo que:

1. $r=2$, $n=9$, $l=256$. **2.** $r=\frac{1}{2}$, $n=8$, $l=1$.

Calcular r y S, sabiendo que:

3. $a=-2$, $n=6$, $l=2\,048$. **4.** $a=\frac{2}{3}$, $n=9$, $l=\frac{2\,187}{128}$.

Calcular l y n, sabiendo que:

5. $a=3$, $r=-\frac{1}{3}$, $S=\frac{1\,640}{729}$. **6.** $a=\frac{1}{2}$, $r=\frac{1}{2}$, $S=\frac{2\,047}{2\,048}$.

7. ¿Qué término de la progresión $\frac{2}{3}$, 2, 6, ... es el número 486?

III. INTERPOLACION
LIMITE DE UNA PROGRESION DECRECIENTE

416. Interpolación de medios geométricos. *Interpolar* m *medios geométricos entre* a *y* b *es formar una progresión geométrica de* m + 2 *términos que tenga* a *como primer término y* b *como último.*

EJEMPLO: Interpolar 3 medios geométricos entre 11 y 14 256.

La progresión constará de $3+2=5$ términos.

La razón se calcula por la fórmula (3); por tanto:

$$r = \sqrt[4]{\frac{14\,256}{11}} = \sqrt[4]{1\,296} = \sqrt{\sqrt{1\,296}} = \sqrt{36} = 6.$$

La progresión que se forma es:

11, 66, 396, 2 376, 14 256.

417. Límite de la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente. Sea el cuadrado *ABCD* que tiene 4 cm de lado. Constrúyase una serie de cuadrados, de manera que los puntos medios de los lados del primero sean los vértices del segundo; los puntos medios de los lados de éste, sean los vértices del tercero, y así sucesivamente (fig. 67).

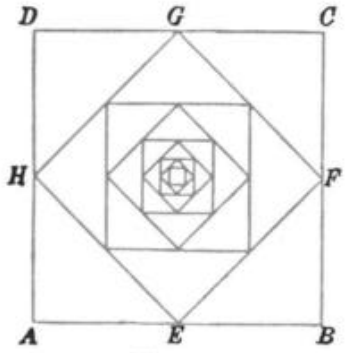


Fig. 67.

El área del cuadrado *ABCD* es 16 cm².

El cuadrado *EFGH* es la mitad del cuadrado *ABCD*; por tanto, el área de los triángulos *HAE, EBF, FCG, GDH* es la mitad del área de dicho cuadrado *ABCD;* luego:

Area de los triángulos del 1er cuadrado = 8 cm².

En forma análoga, se obtiene el área de los demás triángulos. Haciendo la suma de todos ellos, se tiene:

Area de los triángulos del	1er	cuadrado:	8
„	2º	„	4
„	3er	„	2
„	4º	„	1
„	5º	„	.5
„	6º	„	.25
„	7º	„	.125
„	8º	„	.0625
„	9º	„	.03125
Suma de las áreas de todos los triángulos:			15.96875 cm².

En este ejemplo se observa que:

1º Los números 8, 4, 2, 1, etc., forman una progresión geométrica decreciente, de razón $\frac{1}{2}$.

2º El valor de cada término disminuye, y un término se acerca tanto más a cero cuanto mayor sea el número de términos que le preceden.

3º La suma de los términos es constantemente inferior a 16, y tanto más próxima a este número cuanto más términos se tomen en la progresión.

Se dice, en casos como éste, que la suma tiende a un *límite* que, en el problema que se está considerando, es 16.

414. Generalización. Es fácil obtener una fórmula general para calcular el límite a que tiende la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente que, según se ha visto en (8), del Nº 411, es:

$$S = \frac{a - lr}{1 - r}.$$

Este valor de S puede escribirse:

$$S = \frac{a}{1-r} - \frac{lr}{1-r}.$$

Puesto que la progresión es decreciente, sus términos decrecen indefinidamente; y si el número de ellos es suficientemente grande, el enésimo término l tiene por límite cero.

Por tanto, el límite de S es $\frac{a}{1-r}$. Este resultado se escribe, simbólicamente:

$$\lim_{n \to \infty} S = \frac{a}{1-r}. \qquad (10)$$

Luego: *La suma de los términos de una progresión geométrica decreciente, cuando el número de términos aumenta indefinidamente, es igual al primer término de la progresión dividido entre* 1 *menos la razón.*

419. Aplicaciones. 1º Hallar el límite de la suma de los términos de la siguiente progresión:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \cdots$$

Se tiene: $\lim S = \frac{1}{2} : \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1.$

2º Hallar la fracción generatriz del número periódico .574574574...

Si se designa por f la fracción pedida, se puede escribir:

$$f = \frac{574}{1\,000} + \frac{574}{1\,000^2} + \frac{574}{1\,000^3} + \cdots$$

Como se ve, el segundo miembro es una progresión geométrica decreciente que consta de un número indefinido de términos; por lo tanto se tiene:

$$f = \frac{a}{1-r} = \frac{574}{1\,000} : \left(1 - \frac{1}{1\,000}\right) = \frac{574}{1\,000} : \frac{999}{1\,000} = \frac{574}{999}.$$

3º Hallar la fracción generatriz del número .68235235 ...

Llamando f esta fracción, se puede escribir:

$$f = \frac{68}{100} + \frac{235}{100 \times 1\,000} + \frac{235}{100 \times 1\,000^2} + \frac{235}{100 \times 1\,000^3} + \cdots$$

$$f = \frac{68}{100} + \frac{235}{100}\left(\frac{1}{1\,000} + \frac{1}{1\,000^2} + \frac{1}{1\,000^3} + \cdots\right).$$

La cantidad encerrada en el paréntesis es la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente, cuya razón es $\frac{1}{1\,000}$, y su límite es: $\frac{1}{1\,000} : \left(1 - \frac{1}{1\,000}\right) = \frac{1}{1\,000} : \frac{999}{1\,000} = \frac{1}{999}$.

Sustituyendo este valor en la penúltima igualdad, resulta:

$$f = \frac{68}{100} + \frac{235}{100} \times \frac{1}{999} = \frac{68 \times 999 + 235}{999 \times 100} = \frac{68(1\,000 - 1) + 235}{99\,900};$$

y, por último:

$$f = \frac{68\,235 - 68}{99\,900} = \frac{68\,167}{99\,900}.$$

EJERCICIO 83

1. Interpolar 2 medios geométricos entre 5 y 320.
2. Interpolar 6 medios geométricos entre $\frac{3}{2}$ y 192.
3. Interpolar 4 medios geométricos entre -4 y 972.
4. Interpolar 7 medios geométricos entre 32 y 8 192.
5. Interpolar 5 medios geométricos entre 3 y 12 288.
6. Interpolar 4 medios geométricos entre 32 y 7 776.
7. ¿Qué progresión se obtiene interpolando 8 medios geométricos entre 1 y 10?

Calcular el límite de la suma de los términos de las siguientes progresiones, cuyo número de términos crece indefinidamente.

8. $5, \frac{15}{4}, \frac{45}{16}, \frac{135}{64}, \cdots$
9. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$
10. $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \cdots$
11. $\frac{1}{9}, \frac{1}{9^2}, \frac{1}{9^3}, \cdots$
12. $1, -\frac{1}{9}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{729}, \cdots$
13. $\frac{3}{5}, -\frac{9}{25}, \frac{27}{125}, \frac{81}{625}, \cdots$
14. $x, \frac{x}{3}, \frac{x}{9}, \frac{x}{27}, \frac{x}{81}, \cdots$
15. $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1\,000}, \frac{3}{10\,000}, \cdots$

16. Hallar la suma de los términos de la progresión $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \cdots \frac{1}{10^8}$.

Hallar la fracción generatriz de cada una de las siguientes fracciones periódicas:

17. .522522522...
18. .444444444...
19. .999999999...
20. .0101010101...
21. 4.23232323...
22. .12333333...
23. 47.2312121212...
24. 1.37899999...

25. La razón del lado del cuadrado *EFGH* (fig. 67) al lado de *ABCD* es $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si, para cada uno de los cuadrados restantes, la razón del lado de uno al lado del inmediato anterior es también $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ¿cuál es el lado del noveno cuadrado?

Calcúlese el producto de los 7 primeros términos de las progresiones siguientes:

26. $2, 4, 8, \ldots$
27. $8, 4, 2, \ldots$
28. $3, 6, 12, \ldots$
29. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$

30. Dividir 665 en 3 partes positivas que estén en progresión geométrica, de modo que la tercera supere a la primera en 600.

31. Hallar el valor de los 4 ángulos de un cuadrilátero, sabiendo que están en progresión geométrica, y que el valor del tercero es igual al del primero multiplicado por 9.

32. Formar una progresión geométrica de 5 términos cuya razón sea la mitad del segundo término y cuyos 2 primeros términos sumen 10.

33. ¿Qué cantidad se distribuiría entre 12 personas, si se diera \$ 2 a la primera, \$ 6 a la segunda, \$ 18 a la tercera, y así sucesivamente?

34. Si para perforar un pozo de 30 m de profundidad se pidiera 1¢ por el primer metro, 2¢ por el segundo, 4¢ por el tercero, 8¢ por el cuarto, y así sucesivamente; ¿cuánto se cobraría por el último metro? ¿y por la perforación del pozo?

3

LOGARITMOS

I. PRELIMINARES

420. Definiciones. Considérese la función $y = 2^x$. Para representarla gráficamente, comiéncese por la tabulación.

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	0	.0625	.125	.25	5	1	2	4	8	16
Puntos	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

Represéntense los puntos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J y únanse con trazo continuo: se obtiene la gráfica de $y = 2^x$, que es la de la figura 68.

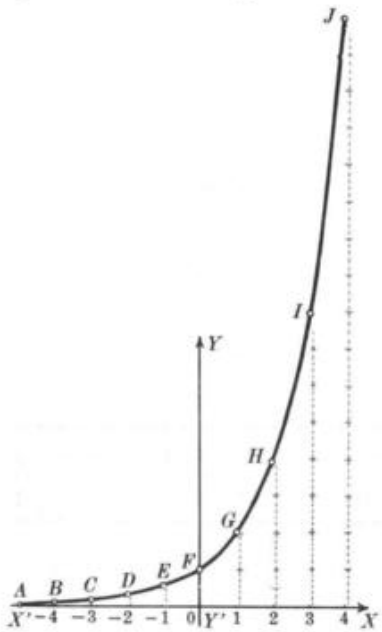


Fig. 68.

El número 2, que se ha elevado a las diferentes potencias, se llama *base*; el valor atribuído a x, o sea, el exponente de la base es, en cada uno de los pares de valores considerados, el **logaritmo** del número y.

Así, -1 es el logaritmo de .5; 2 es el logaritmo de 4, 4 es el logaritmo de 16, etc.

Según esto: *Logaritmo de un número dado es el exponente de la potencia a que debe elevarse cierto número llamado base, para obtener el número dado.*

421. Consecuencias. Examinando la gráfica de $y = 2^x$, o la tabulación, se ve que:

1º Los valores de x forman una *progresión aritmética*, mientras que los de y van en *progresión geométrica*.

2º Cualquiera que sea el valor del exponente, el número y es positivo.

3º En el intervalo de $-\infty$ a 0 para x, el valor de y sólo varía desde 0 hasta 1.

4º A partir de $x = 0$, y crece muy rápidamente, mientras que el crecimiento de x es uniforme.

Si el número y no es cuadrado, cubo, cuarta potencia, etc., de la base, su logaritmo es un número fraccionario. Así, 6 tiene un logaritmo comprendido entre 2 y 3, cuyo valor aproximado es 2.5759.

En lugar de 2^x hubiera podido considerarse 3^x, 4^x, ... 10^x, etc., y la gráfica correspondiente a cada caso sería parecida a la de la función 2^x, y podrían hacerse, con respecto a ella, las mismas observaciones.

Esto indica que la base escogida puede ser un número positivo cualquiera, exceptuando 1 y 0, porque elevados a cualquier potencia dan siempre 1 y 0, respectivamente.

Dado que x es el logaritmo de y, de lo anterior puede deducirse lo siguiente:

1º Sólo los números positivos tienen logaritmos (supuesta la base positiva).

2º Todo logaritmo negativo corresponde a un número comprendido entre 0 y 1.

3º El logaritmo de la base es 1, y el de 1 es 0.

422. Uso de los logaritmos. Considérese el siguiente cuadro análogo al del Nº 420, en que en la parte superior están las potencias sucesivas de 2, y debajo su valor correspondiente.

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096

Si se quiere saber el producto de $32 = 2^5$ por $128 = 2^7$, súmense los exponentes; se obtiene: $32 \times 128 = 2^5 \times 2^7 = 2^{5+7} = 2^{12}$ y se ve, por la tabulación precedente, que ese producto es 4 096. Se ha multiplicado por simple suma de exponentes.

Análogamente, si se quiere calcular el cociente de $2^{12} = 4\,096$ entre $2^8 = 256$, réstense los exponentes, y léase el resultado en

el cuadro anterior: $2^{12} : 2^8 = 2^{12-8} = 2^4 = 16$. La división se ha efectuado por simple resta de exponentes.

En forma análoga, para conocer el cubo de 16, basta escribir: $16^3 = (2^4)^3 = 2^{4\times 3} = 2^{12} = 4\,096$.

Se ha elevado a la potencia indicada multiplicando el exponente por el índice de la potencia.

Por último, si se quiere obtener la raíz quinta de 1 024, basta escribir: $\sqrt[5]{1\,024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^{10:5} = 2^2 = 4$.

Se ha extraído la raíz dividiendo el exponente del radicando entre el índice de la raíz.

De lo que precede se infiere que, mediante el cálculo logarítmico, la multiplicación, la división, la elevación a potencia y la extracción de raíz se reducen, respectivamente, a una suma, una resta, una multiplicación y una división.

423. Notación. Tratándose de los números y de sus logaritmos correspondientes, hay que hacer referencia a la base.

Así, por ejemplo, 64 es la sexta potencia de 2, el cubo de 4, etc., o sea:

$$2^6 = 4^3 = 64;$$

se tiene, por tanto, que 6 es el logaritmo de 64 en el sistema de base 2; que 3 es el logaritmo de 64 en el sistema de base 4, etc. Cada caso se indica escribiendo

$$\log_2 64 = 6, \quad \log_4 64 = 3.$$

EJERCICIO 84

Expresar, con notación logarítmica, las siguientes potencias:

1. $5^3 = 25$.
2. $3^3 = 27$.
3. $4^3 = 16$.
4. $2^5 = 32$.
5. $10^2 = 100$.
6. $10^3 = 1\,000$.
7. $10^{-1} = .1$.
8. $5^4 = 625$.
9. $3^4 = 81$.
10. $3^5 = 243$.
11. $7^3 = 343$.
12. $6^3 = 216$.
13. $2^{12} = 4\,096$.
14. $4^{\frac{1}{2}} = 2$.
15. $10^{\frac{1}{2}} = 3.162$.
16. $10^0 = 1$.
17. $25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$.
18. $10^{\frac{3}{4}} = 5.623$.
19. $2^{\frac{1}{2}} = 1.414$.
20. $3^{\frac{1}{2}} = 1.732$.
21. $5^{\frac{1}{2}} = 2.236$.
22. $8^{-\frac{2}{3}} = .25$.

Expresar en forma exponencial:

23. $\log_3 25 = 2$.
24. $\log_3 27 = 3$.
25. $\log_4 64 = 3$.
26. $\log_5 125 = 3$.
27. $\log_6 216 = 3$.
28. $\log_5 625 = 4$.
29. $\log_7 343 = 3$.
30. $\log_8 64 = 2$.
31. $\log_{10} 100 = 2$.
32. $\log_{10} 10\,000 = 4$.
33. $\log_2 128 = 7$.
34. $\log_{11} 1\,331 = 3$.

II. LOGARITMOS DECIMALES

424. Definiciones. Según se ha dicho, un número positivo cualquiera, exceptuados el 1 y el 0, pueden servir de base para un sistema de logaritmos.

Los logaritmos calculados con la base 10 *se llaman decimales, y también comunes o de Briggs.*

El logaritmo decimal de un número N se indica así: $\log N$.

425. Característica y mantisa. Según se ha visto:

$10^0 = 1$, es decir, $\log 1 = 0$;
$10^1 = 10$, „ $\log 10 = 1$;
$10^2 = 100$, „ $\log 100 = 2$;
$10^3 = 1\,000$, „ $\log 1\,000 = 3$;
. . . . . .

Observando el cuadro anterior, se ve que los números comprendidos entre 1 y 10 deben tener su logaritmo comprendido entre 0 y 1, los números comprendidos entre 10 y 100, deben tenerlo entre 1 y 2, etc.

Así, resulta:

$\log 5 = .6990$, o sea, $10^{.6990} = 5$;
$\log 2.37 = .3748$, „ $10^{.3748} = 2.37$;
$\log 45 = 1.6532$, „ $10^{1.6532} = 45$.

De estas observaciones se desprende que el logaritmo de 5 y el de 2.37 constan sólo de decimales, y que el de 45 comprende una parte entera y una decimal.

A la parte entera de un logaritmo se la llama característica y a la parte decimal, mantisa.

Los números que son cuadrado, cubo, cuarta potencia, quinta potencia, etc., de la base 10, son los únicos cuyo *logaritmo es un número entero.*

426. Característica del logaritmo de un número mayor que 1. De lo que se acaba de exponer se deduce que: la característica del logaritmo de todo número comprendido entre 1 y 10, es 0; la que corresponde al logaritmo de un número comprendido entre 10 y 100, es 1; la que corresponde al de un número comprendido entre 100 y 1 000, es 2, y así sucesivamente. Se infiere de esto que:

La característica del logaritmo de un número mayor que 1 *es positiva, y consta de tantas unidades como cifras hay en la parte entera del número, menos* 1.

427. Logaritmo de un número menor que 1. La base 10 con exponentes negativos da:

$10^0 = 1$, es decir, $\log 1 = 0$;
$10^{-1} = .1$, „ $\log .1 = -1$;
$10^{-2} = .01$, „ $\log .01 = -2$;
$10^{-3} = .001$, „ $\log .001 = -3$;
$10^{-4} = .0001$, „ $\log .0001 = -4$;
.....

El logaritmo de un número menor que 1 *es negativo.*

Así, los números comprendidos entre 1 y .1, tienen su logaritmo comprendido entre 0 y -1; los comprendidos entre .1 y .01, lo tienen entre -1 y -2, etc.; v. gr.:

$$\log .6 = -.2218, \quad \log .0236 = -1.6271.$$

428. Característica del logaritmo de un número menor que 1. Por lo expuesto anteriormente, se ve que todo número comprendido entre 1 y .1, cuya primera cifra significativa ocupa el primer lugar después del punto decimal, tiene -1 como característica de su logaritmo; todo número comprendido entre .1 y .01, cuya primera cifra significativa ocupa el segundo lugar después del punto decimal, tiene la característica de su logaritmo igual a -2, etc. Se deduce de esto que:

La característica del logaritmo de un numero menor que 1 *es negativa, y numéricamente excede en* 1 *al número de ceros que siguen inmediatamente al punto decimal.*

429. Transformación de logaritmos negativos. Conviene, en muchísimos casos, transformar un logaritmo *enteramente negativo* en otro equivalente, que sólo tenga *negativa la característica.* Para esto se agrega -1 a la característica y $+1$ a la mantisa, y se efectúan las operaciones como se explica a continuación.

1º Sea transformar el logaritmo -1.4369, correspondiente a un número comprendido entre .1 y .01, en otro equivalente que sólo tenga negativa la característica.

Se tiene: $-1.4369 = -1-1+1-.4369 = -2+.5631$, en que sólo la característica es negativa.

Se ha convenido en escribir el signo $-$ arriba de la característica y suprimir el signo $+$; por tanto: $-2+.5631$ se escribe $\bar{2}.5631$, queriendo significar, mediante esta notación, que la característica sola es negativa, y positiva la mantisa.

2º Sea -2.4537, logaritmo de un número comprendido entre .01 y .001.

Se tiene:

$$-2.4537 = -2-1+1-.4537 = -3+.5463 = \bar{3}.5463.$$

430. Aplicaciones. Hallar la característica de los logaritmos de los números 2 346 572 y .00004523.

1º El número 2 346 572 es entero y consta de siete cifras; luego la característica de su logaritmo es 6.

2º En el número .00004523, la primera cifra significativa ocupa el quinto lugar en el orden de las decimales; luego, la característica de su logaritmo es $\bar{5}$.

EJERCICIO 85

¿Cuál es la característica de los logaritmos decimales de los números siguientes?:

1. 36.	5. 9 865.	9. 4 375.
2. 9.	6. .097.	10. .00089.
3. 46.	7. 95.38.	11. 45.67.
4. 736.	8. 467.9.	12. .0109.

13. 17 645.	**17.** .00007654.	**21.** .008009.
14. .08765.	**18.** 81.176.	**22.** 11.99.
15. 745.38.	**19** .9769.	**23.** .007008.
16. 9 685.45.	**20.** 764.389.	**24.** 425.679.

LOGARITMOS DECIMALES

(Continuación).

431. Logaritmo del número cero. Los números positivos menores que 1 tienen un logaritmo negativo, y su valor disminuye constantemente, conforme tienden a 0.

Según esto, el logaritmo de 0 debe ser $-\infty$.

Se tiene, en efecto:

$$10^{-\infty} = \frac{1}{10^{\infty}} = 0;$$

por tanto: $\log 0 = -\infty$.

432. Logaritmos de números que sólo difieren en el orden de unidades que representan. Considérese un número cualquiera, 5 468, por ejemplo, cuyo logaritmo es 3.7378.

Se puede escribir: $10^{3.7378} = 5\,468.$ (1)

Dividiendo, sucesivamente, ambos miembros de (1) entre 10, 100 y 10 000, se obtiene:

$$\frac{10^{3.7378}}{10} = \frac{5\,468}{10}, \text{ o sea, } 10^{2.7378} = 546.8.$$

$$\frac{10^{3.7378}}{10^2} = \frac{5\,468}{10^2}, \text{ o sea, } 10^{1.7378} = 54.68.$$

$$\frac{10^{3.7378}}{10^4} = \frac{5\,468}{10^4}, \text{ o sea, } 10^{\bar{1}.7378} = .5468.$$

Luego, las mantisas de los logaritmos de los números 5 468, 546.8, 54.68 y .5468 son iguales; por tanto:

Si varios números sólo difieren en el orden de unidades que representan, la mantisa de su logaritmo es la misma, y sólo varía la característica.

Para determinar la mantisa del logaritmo de un número que comprende una parte entera y una parte fraccionaria, o es enteramente fraccionario, se considera el número como si fuera entero, y la característica se calcula según la naturaleza del número de que se trata.

EJERCICIO 86

Sabiendo que $\log 2\,538 = 3.4045$, calcular el logaritmo de los números:

1. .2538.	**4.** 253.8.	**7.** 253 800.
2. 25.38.	**5.** 25 380.	**8.** .0002538.
3. 2.538.	**6.** .02538.	**9.** 2 538 000.

Sabiendo que 3.9168 es el logaritmo del número 8 256, calcular el logaritmo de los números:

10. 8.256.	**13.** 825.6.	**16.** 82 560 000.
11. 82.56.	**14.** .0008256.	**17.** .000008256.
12. .08256.	**15.** 825 600.	**18.** 82 560.

El logaritmo de .76 es $\bar{1}.8808$. Hallar el logaritmo de:

19. .0076.	**22.** .00076.	**25.** 76 000.
20. 76.	**23.** 760.	**26.** .0000076.
21. 7 600.	**24.** .076.	**27.** 760 000 000.

III. TABLAS DE LOGARITMOS Y SU MANEJO

433. Tablas de logaritmos. Las tablas de las páginas 350 y 351 contienen únicamente la mantisa de los logaritmos de los números enteros comprendidos entre 100 y 1 000; pero, teniendo en cuenta los principios ya explicados, puede fácilmente calcularse la mantisa correspondiente a los demás números, como se explica a continuación.

Con respecto al manejo de las tablas, pueden presentarse dos clases de problemas: el directo, o sea, hallar el logaritmo de un número dado, y el inverso, o sea, hallar un número, conocido su logaritmo.

434. Hallar el logaritmo decimales de un número dado.

1º *El número consta de* 3 *cifras.*

Hallar el logaritmo de 832.

La característica del logaritmo de este número es 2.

En la columna encabezada por N, se busca el número 83, dado por las 2 primeras cifras del número propuesto.

La mantisa buscada se hallará en la fila correspondiente al número 83, y tomada en la columna correspondiente al 2, tercera cifra del número dado.

Se tiene: $\log 832 = 2.9201$.

2º *El número consta de una cifra.*

Hallar el logaritmo de 6.

La característica del logaritmo es 0.

La mantisa del logaritmo de 6 es igual a la del número 600.

Se tendrá, por tanto: $\log 6 = 0.7782$.

3º *El número consta de 4 cifras.*

Hallar el logaritmo de 36.26.

La característica es 1.

La mantisa del logaritmo de 36.2 es 5 587. El aumento, para la mantisa, correspondiente a la 4ª cifra, que es 6, se toma en las columnas de la derecha, llamadas *partes proporcionales*, en la misma fila en que está el 36 y en la columna encabezada por 6. Este aumento es 7.

Por tanto:
$$\log 36.2 = 1.5587$$
$$\text{aumento por } .06 = \quad 7$$
$$\log 36.26 = 1.5594$$

4º *El número consta de más de 4 cifras.*

Hallar el logaritmo del número .021758.

La característica es $\bar{2}$.

La mantisa correspondiente a las cuatro primeras cifras del número, considerado como entero, es 3 375. El aumento, para la mantisa, debido a la cifra 8, tomado en las partes proporcionales, sería 16, si el 8 ocupase el cuarto lugar, pero, como ocupa el quinto, sólo se añadirá la décima parte de 16, o sea 1.6.

En todo caso análogo a éste, en que la primera cifra decimal sea $\geqq 5$, se aumenta en 1 la parte entera y se desecha la parte decimal restante; así, en vez de agregar 1.6 a la mantisa, se añade 2. Por tanto:

$$\log .021758 = \bar{2}.3375 + .0002 = \bar{2}.3377.$$

435. Regla.

Para hallar el logaritmo decimal, de un número dado:

1º *Escríbase la característica del logaritmo de dicho número.*

2º *Hállese en las tablas la mantisa del logaritmo del número formado por las tres primeras cifras del número propuesto, considerado como entero.*

3º *Si el número consta de 4 cifras, agréguese a la mantisa correspondiente al logaritmo del número formado por las 3 primeras, el aumento que, para la 4ª cifra, dan las partes proporcionales.*

4º *Si el número consta de 5 cifras, agréguese a la mantisa del logaritmo del número formado por las 4 primeras, el décimo del aumento que, para la cifra restante, dan las partes proporcionales, y así sucesivamente.*

EJERCICIO 87

Hallar el logaritmo de los números siguientes:

1.	7.	9.	8.837.	17.	.0025785.
2.	84.	10.	52.45.	18.	132.6.
3.	43.54.	11.	3 247.7.	19.	.0031629.
4.	3 450.	12.	10 355.	20.	.003003.
5.	5.436.	13.	67 092.	21.	9 758.4.
6.	7 834.	14.	843.57.	22.	493 826.
7.	.02538.	15.	9.7584.	23.	.0045272.
8.	57 364.	16.	.04567.	24.	.0000056823.

Hallar el logaritmo de los números siguientes, y transformarlo después en otro equivalente enteramente negativo. (Dense las dos respuestas).

25.	.436.	29.	.56849.
26.	.7348.	30.	.4568.
27.	.3629.	31.	.004321.
28.	.6735.	32.	.0005647.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20
M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

IV. TABLAS DE ANTILOGARITMOS Y SU MANEJO

436. Antilogaritmo. Si un número es el logaritmo de otro, el segundo se llama **antilogaritmo** del primero.

Así, 2.7574 es el logaritmo de 572; 572 es el antilogaritmo de 2.7574; por tanto:

Antilogaritmo de un logaritmo es el número correspondiente a dicho logaritmo.

El antilogaritmo de un número N se escribe: antilog N.

437. Tablas de antilogaritmos. Estas tablas (págs. 336 y 337) son parecidas a las de los logaritmos, y se manejan de una manera análoga, como se explica a continuación.

438. Hallar el antilogaritmo de un número dado. 1º *Hallar el número cuyo logaritmo es* 3.5978, *o sea,* antilog 3.5978.

La característica 3 indica que la parte entera del número buscado consta de cuatro cifras, que se hallan del modo siguiente:

En las tablas de antilogaritmos se busca .59 en la primera columna de la izquierda. En la misma fila en que se halla .59 se recorre horizontalmente y hacia la derecha, hasta encontrar la columna encabezada por 7, tercera cifra de la mantisa dada, y allí se halla 3 954.

Siguiendo la misma fila se toma, en las partes proporcionales, el aumento correspondiente a 8, cuarta cifra de la mantisa, y se halla 7, que se agrega a 3 954.

De donde:
$$\begin{aligned} \text{antilog } 3.597 &= 3\,954 \\ \text{aumento por } .0008 &= \quad 7 \\ \text{antilog } 3.5978 &= 3\,961 \end{aligned}$$

2º Hallar el número correspondiente a $\bar{2}.9276$, o sea, antilog $\bar{2}.9276$.

La característica $\bar{2}$ indica que el número es decimal, y que la primera cifra significativa ocupa el segundo lugar, es decir, el número es de la forma .0...

Las cifras restantes se buscan como en el caso anterior, a saber:
$$\begin{aligned} \text{antilog } \bar{2}.927 &= .08453 \\ \text{aumento por } .0006 &= \quad 12 \\ \text{antilog } \bar{2}.9276 &= .08465 \end{aligned}$$

439. Regla. *Para hallar el antilogaritmo de un logaritmo dado:*

1º *Hállese en las tablas de antilogaritmos el número correspondiente a las tres primeras cifras de la mantisa dada.*

2º *Añádase a este número el aumento dado por las partes proporcionales correspondientes a la cuarta cifra de la mantisa.*

3º *Determínese el número de conformidad con la característica.*

4º *Si la parte entera del número debe tener más de 4 cifras, complétese con ceros.*

EJERCICIO 88

Hallar el antilogaritmo de los logaritmos siguientes:

1.	1.9822.	**6.**	$\bar{4}$.9925.	**11.**	2.0071.	**16.**	$\bar{1}$.3657.
2.	$\bar{2}$.0755.	**7.**	5.1351.	**12.**	.4971.	**17.**	3.6390.
3.	.5496.	**8.**	$\bar{3}$.5673.	**13.**	$\bar{6}$.5350.	**18.**	$\bar{2}$.4332.
4.	3.0803.	**9.**	4.5792.	**14.**	.0065.	**19.**	1.4925.
5.	2.8247.	**10.**	3.9871.	**15.**	4.3827.	**20.**	$\bar{3}$.7846.

V. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

440. Logaritmo de un producto. Sea el producto ab. Llamando x y y los logaritmos de a y de b, se tiene:

$$a = 10^x, \qquad (1)$$
$$b = 10^y. \qquad (2)$$

Multiplíquense miembro a miembro (1) y (2):

$$ab = 10^x \times 10^y = 10^{x+y}.$$

De donde: $$\log ab = x + y.$$

Para obtener el logaritmo de un producto, súmense los logaritmos de los factores.

Así, dado $\log 2 = .3010$ y $\log 6 = .7782$,
se tiene: $$\begin{aligned} \log(2 \times 6) &= \log 2 + \log 6 \\ &= .3010 + .7782 = 1.0792. \end{aligned}$$

441. Logaritmo de un cociente. Sea el cociente $a : b$.

Divídase (1) entre (2):

$$a : b = 10^x : 10^y = 10^{x-y}.$$

De donde: $\log(a : b) = x - y.$

Por tanto: *Para obtener el logaritmo de un cociente, réstese el logaritmo del divisor del logaritmo del dividendo.*

Así, dado $\log 24 = 1.3802$ y $\log 3 = .4771$,

se obtiene: $\log(24 : 3) = \log 24 - \log 3$

$= 1.3802 - .4771 = .9031.$

442. Logaritmo de una potencia. Sea obtener $\log a^m$.

Puede escribirse:

$a^m = a \times a \times a \ldots$ (m factores iguales al número a).

Tomando el logaritmo de a:

$\log a^m = \log a + \log a + \ldots$ (m sumandos iguales a $\log a$).

Por tanto: $\log a^m = m \log a.$

Luego: *Para obtener el logaritmo de la potencia de un número, multiplíquese el logaritmo de dicho número por el exponente de la potencia.*

Así, dado $\log 9 = .9542$,

se tiene: $\log 9^2 = 2 \log 9 = 2 \times .9542 = 1.9084.$

443. Logaritmo de una raíz. Sea obtener $\log \sqrt[n]{a}$.

Se tiene sucesivamente: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$,

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \times \log a.$$

De donde: $\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}.$

Por consiguiente: *Para obtener el logaritmo de la raíz de un número, divídase el logaritmo de dicho número entre el índice de la raíz.*

Así, dado $\log 64 = 1.8062$,

se obtiene: $\log \sqrt{64} = \log 64 : 2 = 1.8062 : 2 = .9031.$

444. Aplicaciones. 1º Desarrollar las expresiones siguientes:

$$\log a^2b^3c; \quad \log \frac{a^2b}{c^3}; \quad \log \sqrt[5]{a^3b^2}.$$

Se tiene:

$\log a^2b^3c = \log a^2 + \log b^3 + \log c = 2 \log a + 3 \log b + \log c.$

$\log \frac{a^2b}{c^3} = \log a^2 + \log b - \log c^3 = 2 \log a + \log b - 3 \log c.$

$\log \sqrt[5]{a^3b^2} = \frac{1}{5} \log a^3b^2 = \frac{1}{5}(\log a^3 + \log b^2) = \frac{3 \log a + 2 \log b}{5}.$

2º ¿Qué indica la expresión: $\log a + 4 \log b - \frac{4 \log c}{3}$?

Se sabe que: $4 \log b = \log b^4,$

$\log a + 4 \log b = \log ab^4,$

$4 \log c = \log c^4,$

$\frac{4 \log c}{3} = \log c^{\frac{4}{3}} = \log \sqrt[3]{c^4}.$

Por consiguiente: $\log a + 4 \log b - \frac{4 \log c}{3} = \log \frac{ab^4}{\sqrt[3]{c^4}}.$

3º Sabiendo que $\log 3 = .4771$ y que $\log 6 = .7782$, calcular la expresión:

$$\log \frac{3^2 \times 2^3 \times \sqrt{6}}{\sqrt[3]{18}}.$$

La expresión $\log \frac{3^2 \times 2^3 \times \sqrt{6}}{\sqrt[3]{18}} = \log 3^2 + \log 2^3 + \log \sqrt{6} - \log \sqrt[3]{18}.$

Además, se puede escribir:

$\log 3^2 = 2 \log 3 = 2 \times .4771 = .9542,$

$\log 2^3 = 3 \log 2 = 3 \log \frac{6}{3} = 3(\log 6 - \log 3) = .9033,$

$\log \sqrt{6} = \frac{1}{2} \log 6 = .7782 : 2 = .3891,$

$\log \sqrt[3]{18} = \frac{1}{3} \log 18 = \frac{1}{3} \log(3 \times 6) = \frac{1}{3}(.4771 + .7782) = .4184.$

Luego: $\log \frac{3^2 \times 2^3 \times \sqrt{6}}{\sqrt[3]{18}} = .9542 + .9033 + .3891 - .4184 = 1.8282.$

EJERCICIO 89

Desarrollar las expresiones siguientes, aplicando las propiedades de los logaritmos.

1. $\log abc$.
2. $\log 5a$.
3. $\log(36 \times 45)$.
4. $\log \sqrt{mn}$.
5. $\log a^4$.
6. $\log \frac{3a^2}{2b}$.
7. $\log \frac{cd}{n}$.
8. $\log \sqrt{\frac{3x}{2y}}$.
9. $\log \frac{75 \times 48}{23}$.
10. $\log(d^2 - e^2)$.
11. $\log \sqrt{25 - x^2}$.
12. $\log \sqrt[5]{6a^3}$.

Expresar con un solo término:

13. $\log m + \log n$.
14. $\log 23 + \log 7$.
15. $\log x + \log y$.
16. $5 \log b + 2 \log c$.
17. $\log 26 - \log 5$.
18. $\log 56 + \log 15 - \log 9$.
19. $\frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{3} \log 16$.
20. $\log(n+1) - \log n$.
21. $\log x + \log(x-1)$.
22. $2 \log c - 3 \log d$.

Sabiendo que: $\log 2 = .3010$, $\log 3 = .4771$ y $\log 5 = .6990$, calcular las expresiones siguientes:

23. $\log 6$.
24. $\log 10$.
25. $\log 4$.
26. $\log 9$.
27. $\log 16$.
28. $\log 30$.
29. $\log 300$.
30. $\log 20$.
31. $\log 200\,000$.
32. $\log 5\,000$.
33. $\log 36$.
34. $\log 900$.
35. $\log 144$.
36. $\log \frac{10}{3}$.
37. $\log \frac{72}{25}$.
38. $\log \sqrt{2}$.
39. $\log \sqrt{6}$.
40. $\log \sqrt{5}$.
41. $\log \sqrt[3]{50}$.
42. $\log \sqrt[5]{3\,600}$.

VI. APLICACIONES DE LOS LOGARITMOS

445. Cálculo de productos. 1º Calcular el producto de 17 por 124.

Sea P el producto pedido.

Se tiene:
$$\log P = \log 17 + \log 124$$
$$\log 17 = 1.2304$$
$$\log 124 = 2.0934$$
$$\log P = \overline{3.3238}$$
$$P = \text{antilog } 3.3238 = 2\,108.$$

2º Calcular el producto: $.2408 \times 3.5476 \times (-23.75)$.

Los números negativos no tienen logaritmos, como se ha dicho; sin embargo, puede calcularse el producto de estos números como si fuesen positivos, y afectar después dicho producto del signo que convenga, conforme a la regla de los signos.

Sea P el producto pedido.

Se tiene:
$$\log .2408 = \bar{1}.3816$$
$$\log 3.5476 = .5499$$
$$\log 23.75 = 1.3756$$
$$\log P = \overline{1.3071}$$
$$P = -\text{antilog } 1.3071 = -20.28.$$

Si se efectúa la multiplicación, se obtiene por producto -20.2887244.

Como se ve, el resultado obtenido por el cálculo logarítmico, o sea, -20.28, es tan sólo aproximado.

446. Cálculo de cocientes. 1º Calcular el cociente de 12.37 entre 459.7.

Sea C el cociente pedido.
$$\log C = \log 12.37 - \log 459.7$$
$$\log 12.37 = 1.0923$$
$$\log 459.7 = 2.6625.$$

Para la resta de estos logaritmos, puede procederse así:

La característica 2 del sustraendo, con el 1 que se lleva de la resta de las mantisas, se convierte en 3, que restado de 1, da -2; o sea:
$$\log C = 1.0923 - 2.6625 = \bar{2}.4298.$$

Por tanto: $C = \text{antilog } \bar{2}.4298 = .0269.$

2º Calcúlese el cociente de 36.43 entre .004719.
$$\log C = \log 36.43 - \log .004719$$
$$\log 36.43 = 1.5615$$
$$\log .004719 = \bar{3}.6738.$$

La resta de estos logaritmos puede ofrecer alguna dificultad. Para restarlos, procédase así:
$$\log C = 1.5615 - \bar{3}.6738 = 1.5615 - (-3 + .6738)$$
$$= 1.5615 - (-2.3262) = 1.5615 + 2.3262 = 3.8877.$$

Luego: $C = \text{antilog } 3.8877 = 7\,721$

447. Cálculo de potencias. 1º Hallar el valor de $.3618^3$.

Se tiene: $\log .3618^3 = 3 \log .3618 = 3 \times \bar{1}.5585$

$= 3(-1 + .5585) = \bar{2}.6755.$

De donde: $.3618^3 = \text{antilog } \bar{2}.6755 = .04737.$

2º Calcular la expresión $.4521^4 \times 17^2$.

Sea V el valor de la expresión dada.

$$\log V = 4 \log .4521 + 2 \log 17.$$

$$4 \log .4521 = 4 \times \bar{1}.6552$$

$$= 4(-1 + .6552) = \bar{2}.6208$$

$$2 \log 17 = 2 \times 1.2304 = 2.4608$$

$$\log V = \overline{1.0816}$$

$$V = \text{antilog } 1.0816 = 12.07.$$

448. Cálculo de raíces. 1º Hallar el valor de $\sqrt[5]{96.72}$.

Sea R el valor de la raíz.

Se tiene: $\log R = \frac{1}{5} \log 96.72 = \frac{1.9855}{5} = .3971.$

$$R = \text{antilog } .3971 = 2.496.$$

2º Calcular la expresión $\sqrt[3]{.0254}$.

$$\log R = \frac{1}{3} \log .0254 = \frac{\bar{2}.4048}{3}.$$

El numerador de esta última fracción consta de una parte negativa, 2, y otra positiva, .4048. Para poder efectuar la división, es preciso transformarlo en otra expresión equivalente y tal que la característica sea divisible entre 3. Para esto, basta agregar una unidad negativa a la característica, y una positiva a la mantisa.

Así, se tiene: $\bar{2}.4048 = -3 + 1.4048.$

Por tanto: $\log R = \frac{-3 + 1.4048}{3} = \bar{1}.4682.$

$$R = \text{antilog } \bar{1}.4682 = .294.$$

449. Otros cálculos. 1º Hallar el número de términos de la progresión 2, 6, 18, ... 4 374.

De la fórmula $l = ar^{n-1}$, se deduce:

$$\log l = \log a + (n-1) \times \log r,$$

$$n - 1 = \frac{\log l - \log a}{\log r} = \frac{3.6409 - .3010}{.4771} = 7,$$

$$n = 7 + 1 = 8.$$

2º El primer término de una progresión geométrica es $\frac{1}{243}$, el último término es 6 561, y el número de términos es 14. Hállese la razón.

La fórmula $l = ar^{n-1}$, da:

$$\log l = \log a + (n-1) \log r,$$

$$\log r = \frac{\log l - \log a}{n-1} = \frac{3.8170 - (-2.3856)}{13} = \frac{6.2026}{13} = .4771,$$

$$r = \text{antilog } .4771 = 3.$$

EJERCICIO 90

Efectúense por medio de logaritmos las operaciones indicadas.

1. $6.534 \times 9.647.$
2. $5\,483 \times 7.917 \times 5.365.$
3. $.347 \times .0576 \times .04921.$
4. $.57 \times 1.547 \times 27.09.$
5. $.0004236 \times 325 \times .09497.$
6. $237.9 : 136.5.$
7. $12.56 : 798.6.$
8. $76.19 : .0005467.$
9. $(.548 \times .7854) : .378.$
10. $(5\,489 \times 2.739) : 9\,785.$
11. $11^3.$
12. $14^5.$
13. $.367^4.$
14. $2.049^5.$
15. $\left(\frac{3}{22}\right)^6.$
16. $\left(\frac{5}{73}\right)^3.$
17. $\left(\frac{41}{56}\right)^3.$
18. $\left(\frac{37}{69}\right)^4.$
19. $\sqrt{5}.$
20. $\sqrt{13}.$
21. $\sqrt[3]{10}.$
22. $\sqrt[5]{9\,345}.$
23. $\sqrt[4]{2.984}.$
24. $\sqrt[5]{1.009}.$
25. $\sqrt[5]{26.35}.$
26. $\sqrt[3]{9.556}.$
27. $\sqrt[4]{\frac{9}{13}}.$
28. $\sqrt[3]{\frac{7}{12}}.$
29. $\sqrt[5]{\frac{7}{34}}.$
30. $\sqrt[5]{.837}.$
31. $\sqrt[6]{5.65}.$
32. $\sqrt{.05649}.$
33. $\sqrt{5} \times 7 : \sqrt[3]{24}.$
34. $\sqrt[3]{\frac{824}{173}}.$
35. $\sqrt[4]{\frac{23}{295.3}}.$
36. $39.25 \times \sqrt[3]{.05314}.$
37. $39.87^{1.2}.$
38. $8.693^6.$
39. $\frac{38.03}{293.8} \times \left(\frac{.09317}{2.714}\right)^3.$

40. La superficie de un círculo es 725 cm². Calcúlese el radio. ($S = \pi r^2$).

41. Calcúlese el volumen de una esfera de 2.39 m de radio. ($V = \frac{4}{3} \pi r^3$).

42. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 37.78 m, y un cateto 17.43 m. Calcúlese la longitud del otro cateto. ($a^2 = b^2 + c^2$).

VII. COLOGARITMO. USO Y VENTAJAS

450. Cologaritmo. En el primer ejemplo de cálculo de cocientes (Nº 446), se hubiera podido poner:

$$C = 12.37 \times \frac{1}{459.7},$$

$$\log C = \log 12.37 + \log \frac{1}{459.7}.$$

La expresión $\log \frac{1}{459.7}$ se llama **cologaritmo** de 459.7; o sea:

Cologaritmo de un número es el logaritmo del recíproco de ese número.

El cologaritmo de un número N se escribe: colog N.

451. Hallar el cologaritmo de un número. Sea 459.7 el número y su logaritmo 2.6625.

Según definición:

$$\text{colog } 459.7 = \log \frac{1}{459.7} = \log 1 - \log 459.7 = 0 - 2.6625.$$

Agréguese -1 y $+1$:

$$\text{colog } 459.7 = 0 - 2.6625 = -2 - 1 + 1 - .6625 = \bar{3}.3375.$$

Regla. — *Para hallar el cologaritmo de un número:*

1º *Búsquese el logaritmo de ese número.*

2º *Súmese* 1 *a la característica y cámbiese el signo al resultado.*

3º *Réstese de* 9 *cada una de las cifras de la mantisa, excepto la última cifra significativa de la derecha, que se resta de* 10.

452. Aplicaciones. Hallar el cologaritmo de los números cuyos logaritmos son, respectivamente:

$$\bar{4}.7398, \quad 2.3549, \quad .4237.$$

El primer cologaritmo es 3.2602.

El segundo „ „ $\bar{3}.6451$.

El tercer „ „ $\bar{1}.5763$.

453. Uso del cologaritmo. Cuando se tiene que dividir un número entre otro puede multiplicarse el primero por el recíproco del segundo, es decir, puede agregarse siempre el cologaritmo del segundo en vez de restar su logaritmo.

EJEMPLO: Dividir 12.37 entre 459.7.

Si C es el cociente pedido, se tiene:

$$\log C = \log 12.37 + \text{colog } 459.7.$$

$$\log 12.37 = 1.0923$$
$$\text{colog } 459.7 = \bar{3}.3375$$
$$\log C = \overline{\bar{2}.4298}$$
$$C = \text{antilog } \bar{2}.4298 = .0269.$$

Resultado idéntico al que se obtuvo en el número 446.

454. Ventajas del uso del cologaritmo. El uso del cologaritmo es ventajoso sobre todo cuando, en una división, el dividendo o el divisor, o ambos a la vez, son productos de varios factores, porque entonces el logaritmo del cociente se obtiene efectuando una sola operación, que consiste en agregar a la suma de los logaritmos de los factores del dividendo la suma de los cologaritmos de los factores del divisor.

EJEMPLO: Hallar el valor de $C = \frac{51.38}{87.09 \times .0946}$.

$$\log C = \log 51.38 + \text{colog } 87.09 + \text{colog } .0946$$

$$\log 51.38 = 1.7108$$
$$\text{colog } 87.09 = \bar{2}.0601$$
$$\text{colog } .0946 = 1.0241$$
$$\log C = \overline{.7950}$$
$$C = \text{antilog } .7950 = 6.237.$$

EJERCICIO 91

Hallar el cologaritmo de los números siguientes:

1.	4 375.	**4.**	.03427.	**7.**	2.342.
2.	.002759.	**5.**	7 685.	**8.**	7 010.
3.	32.56.	**6.**	.00004538.	**9.**	.007654.

Efectuar las operaciones indicadas, haciendo uso del cologaritmo.

10. $(.548 \times 36.45) : 22.17.$

11. $(.735 \times .0948) : .2786.$

12. $925 : (.038 \times 584).$

13. $7.38 : (389.6 \times .004567).$

14. $(76.34 \times .005647) : (12.45 \times .9768)$.

15. $(9.37 \times 17.85) : (19.76 \times .07539)$.

16. $(85.09 \times .00095) : (.0076 \times 98.76)$.

17. $(.00457 \times 7\,985) : (236.5 \times .05479 \times 2\,987)$.

18. $\dfrac{825 \times \sqrt{.5673}}{.4674 \times \sqrt[3]{23.85}}$.

19. $\sqrt[3]{24 + \sqrt{20.87}}$.

20. $\dfrac{76.24}{8.762} + \sqrt{\dfrac{25.84}{7.439}}$.

21. $\dfrac{57.63 + \sqrt{51.27}}{.7684}$.

22. $\dfrac{86.42 - \sqrt[4]{19.73}}{23.37}$.

VIII. ECUACIONES EXPONENCIALES

455. Definición. *Ecuación exponencial es aquella en que la incógnita interviene como exponente.*

Así, $a^x = b$, es una ecuación exponencial.

456. Resolución. 1º Sea resolver la ecuación $5^x = 20$.

Tómense logaritmos:

$$x \log 5 = \log 20,$$
$$x = \frac{\log 20}{\log 5} = \frac{1.3010}{.6990} = 1.861.$$

2º Resolver la ecuación $.416^x = 6.72$.

Tómense logaritmos:

$$x \log .416 = \log 6.72,$$
$$x = \frac{\log 6.72}{\log .416} = \frac{.8274}{\bar{1}.6191}.$$

Para poder efectuar la división indicada, hay que transformar el logaritmo del denominador en otro equivalente, enteramente negativo.

Se tiene: $\bar{1}.6191 = -1 + .6191 = -.3809$.

Por tanto: $x = \dfrac{.8274}{\bar{1}.6191} = \dfrac{.8274}{-.3809} = -2.1722$.

3º ¿Cuál es el logaritmo de 276.4 en el sistema de base 15?

Debe tenerse: $15^x = 276.4$

$$x \log 15 = \log 276.4$$
$$x = \frac{\log 276.4}{\log 15} = \frac{2.4415}{1.1761} = 2.0759.$$

4º Resolver la ecuación $3^{x^2-5x+6} = 1$.

Esta ecuación puede escribirse: $3^{x^2-5x+6} = 3^0$.

Siendo iguales las bases, lo son también los exponentes; por tanto:

$$x^2 - 5x + 6 = 0;$$
$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2.$$

De estos ejemplos se deduce que: En la resolución de las ecuaciones exponenciales intervienen generalmente los logaritmos.

EJERCICIO 92

Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

1. $10^x = 2$.
2. $10^x = 5$.
3. $2^x = 76$.
4. $2^x = 1\,024$.
5. $5^{x+1} = 12$.
6. $.73^x = .5329$.
7. $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 7$.
8. $7^{2x} = 7$.
9. $3^{-x} = 2$.
10. $1.3^x = 2.456$.
11. $7^{2x-3} = .02042$.
12. $12^{x^2-2x+3} = 1\,728$.
13. $.25^x = 47.36$.
14. $.425^x = 82.48$.
15. $8^x = 1$.
16. $2^{x^2-2x} = 8$.
17. $15^{x+4} = 72^{x-5}$.
18. $8^{2x^2-4} = 64^x$.
19. $3^{x^2} = 729^x$.
20. $(3^x)^{x-2} = 81$.
21. $2 \log x = 6 \log 2$.
22. $\frac{1}{5} \log x = \frac{\log 7}{5} + \log 2$.
23. $\log x = \log 36 - 2 \log 3$.
24. $2 \log x - 2 \log 4 = \log 3 - \log 7$.
25. $\log x + \log y = 1.4771$, $\log x - \log y = .5229$.
26. $\log x + \log y = \log 3 + 2 \log 2$, $\log x - \log y = \log 3 - 2 \log 2$.
27. $5^{2x} - 34 \times 5^x + 225 = 0$. (Sustitúyase primero 5^x por z).

4

INTERES COMPUESTO Y ANUALIDADES

I. INTERES COMPUESTO

457. Definición. *Un capital está colocado a* **interés compuesto**, *cuando al fin de cada año, el interés producido se agrega a dicho capital, para que produzca a su vez interés durante el año siguiente.*

458. Fórmula general. Represéntese por:

a el capital primitivo;

r el interés anual de \$ 1, o tanto por uno;

n el número de años durante los cuales a produce interés;

A el capital primitivo aumentado en sus intereses.

\$ 1, al cabo de 1 año, se convierte en $1+r$;

\$ a „ „ „ „ „ „ convierten en $a(1+r)$.

$a(1+r)$, es el capital que ha de producir interés durante el segundo año; puesto que \$ 1 se convierte en $1+r$, \$ $a(1+r)$ se convertirán en

$$a(1+r)(1+r)=a(1+r)^2.$$

El capital $a(1+r)^2$, que produce interés durante el tercer año, se convertirá, al fin de dicho año, en

$$a(1+r)^2(1+r)=a(1+r)^3,$$

y así sucesivamente. Al cabo de n años, el capital a se habrá convertido en:

$$A=a(1+r)^n. \qquad (1)$$

Nota. — Examinando la manera de obtener la fórmula general, se ve que los capitales que producen interés forman una progresión geométrica creciente, cuyo 1er término es a y cuya razón es $(1+r)$.

459. Intereses capitalizados cada 6 meses. Si los intereses se capitalizan cada 6 meses, el interés producido por \$ 1 en ese tiempo es $\frac{r}{2}$ y el número de capitalizaciones es $2n$. Se tiene, por tanto, que la fórmula (1) se transforma en:

$$A=a\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}. \qquad (2)$$

460. Deducción de otras fórmulas. En la fórmula general

$$A=a(1+r)^n$$

intervienen 4 cantidades, A, a, r, n; se puede calcular cada una de ellas cuando se conocen las otras 3. Así se obtiene:

$$a=\frac{A}{(1+r)^n}; \qquad (3)$$

$$r=\sqrt[n]{\frac{A}{a}}-1. \qquad (4)$$

Para calcular n, hay que recurrir a los logaritmos. Por la fórmula (1) puede escribirse:

$$\log A=\log a+n\log(1+r),$$

$$n=\frac{\log A-\log a}{\log(1+r)}. \qquad (5)$$

461. Aplicaciones. 1º ¿En qué se convierte un capital de \$ 10 000, colocado a interés compuesto durante 20 años y al 4 % anual?

Resolviendo por logaritmos, la fórmula (1) da:

$$\log A=\log 10\,000+20\log 1.04$$

$$\log 10\,000=4$$

$$20\log 1.04=\ .3400$$

$$\log A=4.3400$$

$$A=\$\,21\,880.$$

2º ¿Cuál es el capital que, colocado a interés compuesto durante 15 años al 5 %, alcanza un monto de \$ 20 000?

De la fórmula (3), resuelta por logaritmos, se obtiene:

$$\log a=20\,000-15\log 1.05$$

$$\log 20\,000=4.3010$$

$$15\log 1.05=\ .3180$$

$$\log a=3.9830$$

$$a=\$\,9\,616.$$

3º Una suma de $12 000 ha producido intereses compuestos al 4.5 % durante un tiempo desconocido, después del cual dicha suma se ha convertido en $23 210. ¿Cuál es el tiempo?

Por la fórmula (5), se obtiene:

$$n = \frac{\log 23\,210 - \log 12\,000}{\log 1.045}$$

$$\log 23\,210 = 4.3657$$
$$\log 12\,000 = 4.0792$$
$$\log 23\,210 - \log 12\,000 = .2865$$
$$\log 1.045 = .0191$$
$$n = \frac{.2865}{.0191} = 15 \text{ años.}$$

4º ¿A qué tanto % se ha colocado una suma de $8 450 cuyo monto, al cabo de 12 años, ha sido de $15 180?

La fórmula (4), resuelta por logaritmos da:

$$\log(1+r) = \frac{\log 15\,180 - \log 8\,450}{12}$$

$$\log 15\,180 = 4.1812$$
$$\log 8\,450 = 3.9269$$
$$\log 15\,180 - \log 8\,450 = .2543$$
$$\log(1+r) = \frac{.2543}{12} = .0212,$$
$$1 + r = 1.05, \text{ o bien: } r = .05.$$

Multiplicando por 100 resulta: $100r = 5$.

El capital ha sido colocado al 5 %.

EJERCICIO 93

1. ¿En cuánto se convierte, después de 12 años, un capital de $18 000 colocado a interés compuesto al 4 % anual?

2. ¿A cuánto asciende, al cabo de 8 años, un capital de $15 000 colocado a interés compuesto de 6 % anual, si los intereses se capitalizan cada 6 meses?

3. Hallar el capital que, colocado a interés compuesto de 6 % anual, se ha convertido en $20 645.50 después de 20 años.

4. ¿Cuál es el capital que, colocado a interés compuesto de $4\,1/2$ % anual, se ha convertido en $25 000 después de 12 años?

5. ¿Cuánto tiempo necesitan $861.95, colocados a interés compuesto de 4 % anual, para convertirse en $1 048.70?

6. ¿A qué tanto % hay que colocar $10 000, durante 15 años, para que se conviertan en $17 990?

7. Hallar el tiempo que tardó un capital de $40 000, colocado a interés compuesto de 2 % semestral, para convertirse en $68 280.

8. Hallar a qué tanto % anual de interés compuesto hay que colocar $20 000 durante 8 años, para que se conviertan en $28 430.

9. ¿Cuánto tiempo necesita, para duplicar su valor, un capital colocado al 4.75 % anual de interés compuesto?

10. Hallar el tiempo que necesita un capital colocado al 4.75 % anual de interés compuesto, para que aumente en su mitad.

II. ANUALIDADES DE IMPOSICION

462. Definición. *Se llama* **anualidad de imposición** *una cantidad fija que se paga cada año, o periódicamente, con el objeto de constituir un capital.*

463. Problema general. *Una persona coloca, a interés compuesto,* $a *al principio de cada año, al tanto por uno anual* r. *Hallar el capital* C *constituído de este modo al cabo de* n *años.*

La primera anualidad queda colocada durante n años; al cabo de este tiempo vale:

$$a(1+r)^n.$$

La 2ª queda colocada durante $n-1$ años y llega a valer:

$$a(1+r)^{n-1}.$$

La 3ª queda colocada durante $n-2$ años, y llega a valer:

$$a(1+r)^{n-2}.$$

La última anualidad queda colocada durante un año, y el valor que adquiere es:

$$a(1+r).$$

El capital constituído es igual a la suma de los valores adquiridos por cada anualidad. Su valor, representado por C, es pues:

$$C = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a(1+r),$$

o bien, poniendo a en factor e invirtiendo el orden de los sumandos:

$$C = a[(1+r) + \ldots + (1+r)^{n-2} + (1+r)^{n-1} + (1+r)^n].$$

La suma contenida en el paréntesis rectangular es la de los términos de una progresión geométrica creciente de n términos, cuya razón es $(1+r)$. Representando por S dicha suma, se tiene:

$$S = \frac{(1+r)^n(1+r)-(1+r)}{(1+r)-1} = \frac{(1+r)^{n+1}-(1+r)}{r}.$$

Llevando este valor a la igualdad anterior, se obtiene:

$$C = \frac{a}{r}[(1+r)^{n+1} - (1+r)]. \qquad (6)$$

464. Aplicaciones. 1º Una persona coloca al principio de cada año \$ 1 000 a interés compuesto de 5 % anual; ¿cuánto podrá retirar un año después de la 15ª entrega?

Aplicando la fórmula (6), se puede escribir:

$$C = \frac{1\,000}{.05}(1.05^{16} - 1.05).$$

Calculando 1.05^{16} por logaritmos, se tiene:

$$\log 1.05^{16} = 16 \log 1.05 = .3392,$$
$$1.05^{16} = 2.184.$$

Luego: $C = 20\,000(2.184 - 1.05) = \$\,22\,680.$

2º ¿Cuánto se debe colocar al 4 %, al principio de cada año, para poder retirar \$ 45 000 al cabo de 10 años?

Despejando a en la fórmula (6), se obtiene:

$$a = \frac{45\,000 \times .04}{1.04^{11} - 1.04}.$$

Calculando 1.04^{11} por logaritmos, se tiene:

$$\log 1.04^{11} = 11 \log 1.04 = .1870,$$
$$1.04^{11} = 1.538.$$

Por tanto: $a = \frac{45\,000 \times .04}{1.538 - 1.04} = \frac{1\,800}{.498} = \$\,3\,614.$

3º Una persona coloca anualmente \$ 2 000 al 4.5 % de interés compuesto. ¿Dentro de cuántos años podrá cobrar \$ 65 566.25?

Para despejar n en la fórmula (6), se tiene sucesivamente:

$$Cr = a(1+r)(1+r)^n - a(1+r),$$
$$a(1+r)(1+r)^n = Cr + a(1+r),$$
$$(1+r)^n = \frac{Cr + a(1+r)}{a(1+r)}.$$

Tomando logaritmos en esta última igualdad, resulta:

$$n \log(1+r) = \log[Cr + a(1+r)] - \log a(1+r),$$
$$n = \frac{\log[Cr + a(1+r)] - \log a(1+r)}{\log(1+r)}.$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$n = \frac{\log(65\,566.25 \times .045 + 2\,000 \times 1.045) - \log(2\,000 \times 1.045)}{\log 1.045},$$
$$n = \frac{\log 5\,040.48 - \log 2\,090}{\log 1.045} = \frac{3.7024 - 3.3201}{.0191} = 20 \text{ años}.$$

Nota. — Los datos del problema exigen un número entero de anualidades; si n resultase fraccionario, sería necesario modificar las condiciones del problema.

EJERCICIO 94

1. Un empleado desea conocer qué suma recibirá después de 20 años, si al principio de cada año coloca \$ 200 a interés compuesto de 5 %.

2. Un padre de familia quiere proporcionar un capital igual a cada uno de sus 4 hijos; para ello, coloca cada año \$ 4 320 al 5 % anual de interés compuesto. ¿Qué suma recibirá cada hijo al cabo de 15 años?

3. Un negociante ha colocado, al principio de cada año, cierta cantidad a interés compuesto de 5 %. ¿Cuánto entregó anualmente, si al cabo de 10 años recibe \$ 42 304?

4. El primer día de cada año se hace una entrega de \$ 500 a interés compuesto de 5 %. ¿Después de cuántos años se podrá recibir un capital de \$ 18 760?

5. Un negociante, de 35 años de edad, desea tener un capital de \$ 35 000, a la edad de 60 años. ¿Qué cantidad tendrá que colocar al principio de cada año, al 4 % anual, para realizar su intento?

6. Un capital de \$ 63 000 debe ser constituído por medio de anualidades de \$ 9 150, que producen interés compuesto al 4 % anual. Se pide el número de anualidades.

III. ANUALIDADES DE AMORTIZACION

465. Definición. *Se llama* **anualidad de amortización**, *cada una de las cantidades iguales que se pagan al fin de cada año, o período, para extinguir una deuda.*

466. Problema general. *Una persona ha pedido prestada una cantidad* A *a interés compuesto al tanto por uno* r; *quiere pagar su deuda por medio de* n *anualidades iguales de* $a, *que empieza a entregar un año después de contraída la deuda. Calcular la anualidad de amortización.*

Después de n años, el capital prestado vale:

$$A(1+r)^n.$$

El deudor debe reembolsar esta cantidad por medio de n anualidades de $\$a$. La primera anualidad produce interés durante $n-1$ años, al cabo de los cuales vale:

$$a(1+r)^{n-1}.$$

La 2ª produce interés durante $n-2$ años, y llega a valer:

$$a(1+r)^{n-2}.$$

La 3ª produce interés durante $n-3$ años, y llega a valer:

$$a(1+r)^{n-3},$$

y así sucesivamente; de modo que la penúltima produce interés durante 1 año, llegando a valer:

$$a(1+r).$$

Por fin, la última no produce interés y vale a.

El total de estas anualidades y de sus intereses debe ser igual al capital reembolsable; por tanto:

$$A(1+r)^n = a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+ \ \dots \ +a(1+r)+a.$$

El segundo miembro es la suma de los términos de una progresión geométrica; por tanto, puede escribirse:

$$A(1+r)^n = \frac{a(1+r)^{n-1}(1+r)-a}{(1+r)-1} = \frac{a(1+r)^n-a}{r} = \frac{a[(1+r)^n-1]}{r}.$$

De donde: $$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}. \qquad (7)$$

467. Aplicaciones. 1º Se han prestado $\$50\,000$ a interés compuesto al 4 % anual, y se quiere reembolsar el empréstito en 11 anualidades. ¿De cuánto debe ser cada anualidad?

Aplicando la fórmula (7) se obtiene:

$$a = \frac{50\,000 \times .04 \times 1.04^{11}}{1.04^{11}-1}.$$

Calculando 1.04^{11} por logaritmos:

$$\log 1.04^{11} = 11 \log 1.04 = .1870,$$
$$1.04^{11} = 1.538.$$

Por tanto: $a = \frac{50\,000 \times .04 \times 1.538}{.538} = \frac{3\,076}{.538} = \$5\,717.$

2º Para reembolsar un empréstito, hecho al 5 %, se deben pagar 22 anualidades de $\$1\,565$ cada una. ¿De cuánto es el empréstito?

Despejando A en la fórmula (7), se obtiene:

$$A = \frac{a[(1+r)^n-1]}{r(1+r)^n}.$$

$$A = \frac{1\,565(1.05^{22}-1)}{.05 \times 1.05^{22}}.$$

Calculando 1.05^{22} por logaritmos:

$$\log 1.05^{22} = 22 \log 1.05 = .4664,$$
$$1.05^{22} = 2.927.$$

Luego: $$A = \frac{1\,565 \times 1.927}{.05 \times 2.927} = \$20\,606.$$

EJERCICIO XCV

1. ¿Qué anualidad es preciso pagar para extinguir, en 15 años, una deuda de $\$40\,000$, capitalizándose los intereses al 5 % anual?

2. Hallar la deuda que se podrá cubrir al cabo de 6 años, pagando cada año $\$750$. Interés compuesto de 5 % anual.

3. Un comerciante pidió prestada una suma de $\$15\,000$ al 5 % anual, a interés compuesto; habiendo entregado ya 10 anualidades de $\$1\,000$ cada una, ¿qué cantidad queda debiendo todavía?

4. Un comerciante pide prestados $\$100\,000$ al 5 % anual, a interés compuesto, y se propone extinguir su deuda entregando 16 anualidades de igual valor. ¿A cuánto asciende cada anualidad?

5. Se compra una casa en $\$30\,000$, pagaderos al contado. Se conviene después en modificar las condiciones de pago, y cubrir la deuda haciendo 3 pagos anuales de igual valor. La primera entrega deberá hacerse efectiva dentro de un año. Si el interés compuesto es calculado a razón de 5 %, ¿qué valor deberá tener cada anualidad?

6. ¿Cuánto tiempo se necesita para reembolsar una suma de $\$12\,800$, prestada al 4 % y a interés compuesto, si se entrega cada año $\$1\,153$?

7. Se hace un empréstito de $\$185\,000$, que debe reembolsarse con 10 pagos anuales de igual valor. La primera entrega tiene que efectuarse un año después de verificado el empréstito. Teniendo en cuenta los intereses compuestos al 4.5 % anual, hallar el valor de cada anualidad.

APENDICE

1

DIVISION SINTETICA O ABREVIADA

468. División sintética. Tratándose de la división de un polinomio entero en x entre un binomio de la forma $x \pm a$, puede obtenerse el cociente, sin seguir el procedimiento ordinario, empleando el de la *división sintética*.

Sea la división de $5x^3 + 2x^2 - 4x + 3$ entre $x - 2$, que suele disponerse como sigue:

$$\begin{array}{r|l} 5x^3 + 2x^2 - 4x + 3 & x - 2 \\ \hline -5x^3 + 10x^2 & 5x^2 + 12x + 20 \\ \hline 12x^2 & \\ -12x^2 + 24x & \\ \hline 20x & \\ -20x + 40 & \\ \hline 43 & \end{array}$$

Como primera abreviación, se puede dejar de escribir los productos de cada término del cociente por el primer término del divisor, y poner solamente los productos del segundo término del divisor, con los signos cambiados. Después, sumando estos resultados con el dividendo, se obtiene:

$$\begin{array}{r|l} 5x^3 + 2x^2 - 4x + 3 & x - 2 \\ \hline +10x^2 + 24x + 40 & 5x^2 + 12x + 20 \\ \hline 5x^3 + 12x^2 + 20x + 43 & \end{array}$$

Obsérvese que los coeficientes de los diversos grados de x en $5x^3 + 12x^2 + 20x + 43$ son los coeficientes de los términos del cociente, y que 43 es el residuo. Se puede, por tanto, como última abreviación, suprimir todas las x y poner, además, $(+2)$ en vez de (-2) en el divisor, porque al producto de (-2) por cada término del cociente hay que cambiarle el signo para efectuar la resta. Resulta, pues, la operación en la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} 5 + 2 - 4 + 3 & +2 \\ \hline +10 + 24 + 40 & \\ \hline 5 + 12 + 20 + 43 & \end{array}$$

De lo anterior se deduce que:

1º *El grado del cociente es inferior en* 1 *al del dividendo.*

2º *El coeficiente del primer término del cociente es igual al del primer término del dividendo.*

3º *Cada uno de los demás es igual al anterior multiplicado por el segundo término del divisor, con el signo cambiado, más el coeficiente del término correspondiente del dividendo.*

4º *El último número obtenido es el residuo de la división.*

469. Observaciones. 1ª Si faltara alguna potencia de x en el dividendo, se supliría dándole cero como coeficiente

EJEMPLO:

Dividir $5x^5 + 3x^2 + x - 4$ entre $x + 3$.

Se pone: $5x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 3x^2 + x - 4$.

$$\begin{array}{r|l} 5 + 0 + 0 + 3 + 1 - 4 & -3 \\ \hline -15 + 45 - 135 + 396 - 1\,191 & \\ \hline 5 - 15 + 45 - 132 + 397 - 1\,195 & \end{array}$$

El cociente es $5x^4 - 15x^3 + 45x^2 - 132x + 397$; 1 195 es el residuo.

2ª Si el primer término del divisor tiene un coeficiente diferente de 1, puede aplicarse también la *división sintética*, previa división de los términos del dividendo y de los del divisor entre dicho coeficiente, y proceder después como en los ejemplos expuestos.

EJERCICIO 96

Calcular el cociente y el residuo, aplicando la división sintética.

1. $(2x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 54x^2 - 32x - 30) : (x - 1)$.
2. $(x^4 - 8x^3 + 6) : (x - 2)$.
3. $(3x^4 - 2x^3 + x + 6) : (x + 3)$.
4. $(4x^3 - 4x^2 - 3x + 2) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$.
5. $(2x^5 - 4x^3 + 5x) : (x - 5)$.
6. $(2x^4 + 3x^3 - 28) : (x + 5)$.
7. $(5x^6 + 4x^5 - 7x^3 + 3x - 12) : (x + 1)$.
8. $(3x^7 - 24x^3 + 22) : (x - 2)$.

2

DETERMINANTES

I. RESOLUCION DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES SIMULTANEAS CON DOS INCOGNITAS

470. **Ejemplo.** Sea el sistema de dos ecuaciones *heterogéneas* (que contienen términos independientes de las incógnitas) con dos incógnitas

$$a_1x + b_1y = m_1, \qquad (1)$$
$$a_2x + b_2y = m_2. \qquad (2)$$

Multiplíquese la (1) por b_2 y la (2) por b_1, para eliminar y:

$$a_1b_2x + b_1b_2y = b_2m_1, \qquad (3)$$
$$a_2b_1x + b_1b_2y = b_1m_2. \qquad (4)$$

Réstese (4) de (3):

$$a_1b_2x - a_2b_1x = b_2m_1 - b_1m_2.$$

Póngase x en factor y despéjese; se obtiene, sucesivamente:

$$x(a_1b_2 - a_2b_1) = b_2m_1 - b_1m_2,$$
$$x = \frac{b_2m_1 - b_1m_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Procediendo en forma análoga, es decir, multiplicando la (1) por a_2 y la (2) por a_1, etc., se obtendría:

$$y = \frac{a_2m_1 - a_1m_2}{a_2b_1 - a_1b_2},$$

o, multiplicando numerador y denominador por (-1) para que el denominador de y resulte igual al de x:

$$y = \frac{a_1m_2 - a_2m_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Como se ve, los valores de x y de y quedan expresados en función de los coeficientes de las incógnitas y de los términos independientes de las ecuaciones propuestas.

471. **Determinante.** *El denominador* $a_1b_2 - a_2b_1$ *se llama* **determinante** *del sistema,* y se ha convenido en escribirlo en la forma siguiente, en que la letra griega Δ (delta) simboliza el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

significando, con esta notación, la diferencia de los productos en cruz, como lo indican las diagonales en el diagrama siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Siendo los numeradores de las fracciones que expresan los valores de las incógnitas también diferencias de productos en cruz, resulta que los valores de las variables pueden escribirse como sigue:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & m_1 \\ a_2 & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Por los resultados que preceden se ve que:

En un sistema de dos ecuaciones simultáneas, el valor de cada incógnita es igual a un quebrado que tiene por denominador un determinante formado con los coeficientes de las incógnitas, y cuyo numerador se deduce del denominador, sustituyendo los coeficientes de la incógnita, por los términos independientes.

472. Aplicaciones. Resolver los sistemas de ecuaciones:

1º $5x + 2y = 8, \quad 2x - 3y = 7.$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-24-14}{-15-4} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{-19} = \frac{35-16}{-19} = -1.$$

2º $2x + 6z = 18, \quad 5x - z = -19.$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 18 & 6 \\ -19 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-18+114}{-2-30} = -3; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 18 \\ 5 & -19 \end{vmatrix}}{-32} = \frac{-38-90}{-32} = 4.$$

EJERCICIO 97

Resolver los sistemas siguientes, aplicando el procedimiento expuesto.

1. $5x + 4y = 22, \quad 3x + y = 9.$
2. $x - 6y = -10, \quad 2x - 7y = -15.$
3. $2x + y = 9. \quad 5x + 3y = 25.$
4. $6x - 5y = -10, \quad 5x - 2y = -17.$
5. $12x - 6y = 19, \quad 4y - 3x = -11.$
6. $3x - 7y = 16, \quad 5x + 4y = 11.$
7. $7x - 4y = 3, \quad 5x + 8y = 5.$
8. $12y - 10x = -6, \quad 7y + x = 99.$
9. $7x + 4y = 3, \quad 2x + 3y = 25.$
10. $8x + 4y = -28, \quad 3x + 9y = 12.$
11. $48 = 2v + 21u, \quad 64 = 2v + 29u.$
12. $225 = 11t - 121z, \quad 306 = 17t - 289z.$

II. DETERMINANTES DE SEGUNDO ORDEN

473. Definiciones. El determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \qquad (1)$$

por constar de dos *columnas* y de dos *renglones,* se denomina determinante de *segundo orden.*

Los símbolos a_1, a_2, b_1, b_2 se llaman *elementos* del determinante. La expresión $a_1b_2 - a_2b_1$ es el desarrollo del determinante y representa su valor.

La dirección a_1b_2 se llama *diagonal principal.*

474. Propiedades de los determinantes de segundo orden.

1ª *Si se permutan los elementos simétricos con respecto a la diagonal principal, el valor del determinante no se altera.*

Permútense los elementos simétricos en (1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \Delta.$$

475. 2ª Propiedad. *Si se permutan dos líneas cualesquiera, el valor del nuevo determinante es simétrico del valor del primero.*

Permútense renglones en (1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_2b_1 - a_1b_2 = -(a_1b_2 - a_2b_1) = -\Delta.$$

Lo mismo sucede si se permutan dos columnas:

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_2b_1 - a_1b_2 = -(a_1b_2 - a_2b_1) = -\Delta$$

476. 3ª Propiedad. *Si se multiplican los elementos de una misma línea por una constante, el determinante queda multiplicado por dicha constante; y si se dividen entre un mismo divisor, el determinante queda dividido entre dicho divisor.*

Multiplíquense en (1) por una constante k los elementos de una columna, la primera, por ejemplo:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = ka_1b_2 - ka_2b_1 = k(a_1b_2 - a_2b_1) = k\Delta$$

Multiplíquense por k los elementos de un renglón, el segundo, por ejemplo:

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ka_2 & kb_2 \end{vmatrix} = ka_1b_2 - ka_2b_1 = k(a_1b_2 - a_2b_1) = k\Delta.$$

Si k es el recíproco de un número m, se tiene:

$$\Delta = \frac{\Delta}{m}$$

477. 4ª Propiedad *Si a los elementos de una línea se agregan, o restan, los elementos correspondientes de la otra, no se altera el valor del determinante.*

Súmense, por ejemplo, a los elementos de la primera columna de (1) los correspondientes de la segunda:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} (a_1 + b_1) & b_1 \\ (a_2 + b_2) & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 + b_1b_2 - a_2b_1 - b_1b_2 = a_1b_2 - a_2b_1 = \Delta.$$

Réstense de los elementos del primer renglón de (1) los correspondientes del segundo:

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} (a_1 - a_2) & (b_1 - b_2) \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_2 - a_2b_1 + a_2b_2 = a_1b_2 - a_2b_1 = \Delta.$$

Nota. — En la misma forma se demuestra que a los elementos de una línea cualquiera pueden agregarse (o restarse) cantidades proporcionales a los elementos correspondientes de la otra, sin que se altere el valor del determinante.

La aplicación de esta propiedad es, sobre todo, interesante tratándose de determinantes de orden superior al segundo.

478. Simplificación de un determinante. De la 3ª propiedad, se deduce el modo de *simplificar un determinante.*

Sea el determinante

$$\begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 12 \times 7 - 8 \times 9 = 84 - 72 = 12.$$

Los elementos de la primera columna son múltiplos de 4. Dividiéndolos entre 4 y multiplicando por 4 el determinante para que no se altere su valor, se obtiene, como primera simplificación:

$$\begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 4(3 \times 7 - 2 \times 9) = 12.$$

Dividiendo entre 3 los elementos del primer renglón y multiplicando por 3 el valor del nuevo determinante, se tiene, como última simplificación:

$$\begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 4 \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 4 \times 3(7 - 6) = 12.$$

III. RESOLUCION DE UN SISTEMA DE 2 ECUACIONES CON 3 INCOGNITAS

479. Ejemplo. Sea el sistema de 2 ecuaciones *homogéneas* (que no contienen términos independientes de la incógnita) con 3 incógnitas

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0.$$

Pásese el tercer término de cada ecuación al segundo miembro, y divídase entre z:

$$a_1\frac{x}{z} + b_1\frac{y}{z} = -c_1,$$
$$a_2\frac{x}{z} + b_2\frac{y}{z} = -c_2.$$

Considerando $\frac{x}{z}$ como primera incógnita, y $\frac{y}{z}$ como segunda, se puede escribir:

$$\frac{x}{z} = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad \frac{y}{z} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Permútese la segunda columna con la primera, y multiplíquese después por -1, conforme a las propiedades segunda y tercera:

$$\frac{x}{z} = -\frac{\begin{vmatrix} b_1 & -c_1 \\ b_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad (1)$$

$$\frac{y}{z} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad (2)$$

Permútense medios en (1) y (2) e iguálese:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad - \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Iguálese cada razón a k, constante arbitraria, y resuélvase:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = k;$$

$$x = k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad y = -k\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad z = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Para facilitar el cálculo del denominador de cada una de las razones, se disponen los coeficientes de las incógnitas de la manera siguiente:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix},$$

expresión que ha recibido el nombre de *matriz.*

Por lo que precede, se ve que:

1º *El valor de* x *es igual al producto de una constante* k, *por el determinante de segundo orden que se forma suprimiendo en la matriz los coeficientes de* x.

2º *El valor de* y *es igual al producto de* k, *por el determinante que se forma suprimiendo en la matriz los coeficientes de* y, *con el signo cambiado.*

3º *El valor de* z *es igual al producto de* k *por el determinante que se obtiene suprimiendo en la matriz los coeficientes de* z.

480. Aplicaciones. Resolver:

1º $3x + 8y + 3z = 0, \quad 2x + 5y + 2z = 0.$

Matriz: $\begin{Vmatrix} 3 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{Vmatrix}$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = k.$$

Haciendo $k = 1$, se obtiene:

$$x = 1\,(16 - 15) = k = 1,$$
$$y = -\,k(6 - 6) = 0,$$
$$z = k(15 - 16) = -\,k = -1.$$

La terna de valores $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$, y todos los números que les son proporcionales, satisfacen el sistema propuesto.

2º $5x + 4y + 3z = 0, \quad x + 2y + 6z = 0.$

Matriz: $\begin{Vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{Vmatrix}$

Haciendo $k = 1$, se obtiene:

$$x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 18, \quad y = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -27, \quad z = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

Dividiendo entre 3 el valor calculado para cada incógnita, resulta:

$$x_1 = 6, \quad y_1 = -9, \quad z_1 = 2,$$

terna de valores que, como todos los números a ellos proporcionales, satisface el sistema dado.

Si se hace $k = 0$, se obtiene $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, $z_2 = 0$; pero esta solución generalmente no se toma en cuenta.

Nota. — Como se ve, tanto el primer sistema como el segundo, son indeterminados, pues hay un número indefinido de valores que los satisfacen.

Se ha hecho su estudio no tan sólo para ver la manera de resolver un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas, sino más bien en vista de las aplicaciones que se hacen en la resolución de un sistema de 3 ecuaciones heterogéneas con 3 incógnitas.

IV. DETERMINANTE DE TERCER ORDEN

481. Definición. *Llámase determinante de tercer orden, el que consta de* 3 *columnas y de* 3 *renglones,* v. gr.:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Intervienen en él 9 elementos; la dirección dada por los elementos $a_1b_2c_3$ constituye la *diagonal principal.*

482. **Desarrollo del determinante de tercer orden.** Cada término del desarrollo, debe contener un elemento de cada columna y uno de cada renglón.

Así, $a_1b_2c_3$, $a_3b_2c_1$, son términos del desarrollo.

483. **Regla de Sarrus.** La regla de Sarrus es un artificio ideado para obtener el desarrollo de un determinante de tercer orden.

$a_1\ b_1\ c_1$
$a_2\ b_2\ c_2$
$a_3\ b_3\ c_3$
$a_1\ b_1\ c_1$
$a_2\ b_2\ c_2$

Para eso se escriben los 2 primeros renglones a continuación del tercero y se trazan oblicuas como las de la figura adjunta; luego, *se suman separadamente los productos de los elementos indicados por las oblicuas descendentes y por las oblicuas ascendentes, y se resta la segunda suma de la primera.*

Así, resulta:

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - (a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2 + a_3b_2c_1).$$

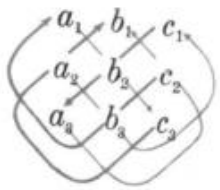
484. **Aplicación.** Desarrollar el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -6 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{matrix}$$

$$\Delta = -15 + 6 + 24 - (4 - 54 + 10)$$
$$= 84 - 29 = 55.$$

485. **Observación.** El desarrollo de un determinante de tercer orden puede obtenerse también siguiendo el procedimiento sugerido por la figura adjunta, a saber:



Se suman separadamente los productos de los elementos indicados por las líneas delgadas y por las líneas gruesas, y se resta la segunda suma de la primera.

Se tiene así que el desarrollo del determinante anterior es:

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3c_2b_1 - (c_1b_2a_3 + c_2b_3a_1 + c_3a_2b_1).$$

EJERCICIO 98

Calcúlese el valor de los determinantes siguientes:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 6 & 21 & 13 \\ 7 & 25 & 16 \end{vmatrix}$. **7.** $\begin{vmatrix} 11 & 1 & 8 \\ 44 & 4 & 7 \\ 33 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 10 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 7 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 \\ -8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -4 & 8 \end{vmatrix}$.

Resolver las ecuaciones siguientes:

10. $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$. **11.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & x^2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. **12.** $\begin{vmatrix} (\sqrt{5}+x) & x \\ x & (\sqrt{5}-x) \end{vmatrix} = 0.$

V. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES DE TERCER ORDEN

486. **1ª Propiedad.** *Si se permutan los elementos simétricos con respecto a la diagonal principal, el determinante no cambia de valor.*

En efecto, sea el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3. \quad (1)$$

Permútense los elementos simétricos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_1c_2 + a_3b_2c_1 - a_2b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 = \Delta.$$

487. **2ª Propiedad.** *Si en un determinante de tercer orden se permutan 2 líneas paralelas cualesquiera, el valor del nuevo determinante es simétrico del valor del primero.*

Permútense las dos primeras columnas en (1):

$$\Delta' = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1 + a_1b_3c_2 - a_2b_3c_1 - a_3b_1c_2 - a_1b_2c_3$$
$$= -(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1) = -\Delta.$$

Puede comprobarse que el principio es también cierto cambiando la columna de las a por la de las c, o la de las c por la de las b.

Igual modificación sucede si se intercambian dos renglones.

488. 3ª Propiedad. *Si se multiplican los elementos de una misma línea por una constante, el determinante resulta multiplicado por dicha constante; y si se dividen entre un mismo divisor, el determinante queda dividido entre dicho divisor.*

Multiplíquense en (1) por la constante k los elementos de una columna cualquiera, la primera por ejemplo:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ka_1b_2c_3 + ka_2b_3c_1 + ka_3b_1c_2 - ka_3b_2c_1 - ka_1b_3c_2 - ka_2b_1c_3$$
$$= k(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3) = k\Delta.$$

Lo mismo se demostraría multiplicando los elementos de un renglón cualquiera por k.

Si k es el recíproco de un número m, se obtiene, sustituyendo su valor en el resultado anterior:

$$\Delta' = \frac{\Delta}{m}.$$

489. 4ª Propiedad. *Si a los elementos de una línea cualquiera se agregan, o restan, los elementos correspondientes de una línea paralela, o cantidades a éstos proporcionales, no se altera el valor del determinante.*

Añádase a cada elemento de una línea, v. gr.: la segunda columna del determinante (1), el correspondiente elemento de otra, de la tercera columna, por ejemplo, multiplicado por m; se obtiene:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & (b_1+mc_1) & c_1 \\ a_2 & (b_2+mc_2) & c_2 \\ a_3 & (b_3+mc_3) & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + ma_1c_2c_3 + a_2b_3c_1 + ma_2c_1c_3 + a_3b_1c_2 + ma_3c_1c_2$$
$$- a_3b_2c_1 - ma_3c_1c_2 - a_1b_3c_2 - ma_1c_2c_3 - a_2b_1c_3 - ma_2c_1c_3;$$
$$\Delta' = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 = \Delta.$$

490. 5ª Propiedad. *El valor de todo determinante de tercer orden que tiene dos líneas paralelas idénticas, es cero.* Lo mismo sucede si los elementos de dichas líneas son proporcionales.

Efectivamente, si se restan los elementos de una de ellas de los correspondientes de su igual, los elementos de esta última se anulan y, por tanto, el valor del determinante es cero, porque el cero figura como factor en cada término del desarrollo.

491. Descomposición de un determinante de tercer orden. Sea el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$$

Agrúpense los términos de dos en dos, de modo que se puedan poner en factor los elementos de una misma línea. Haciéndolo con a_1, a_2, a_3, se obtiene:

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1);$$
$$\Delta = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Permútense los renglones del 2º determinante para que los índices figuren en el orden natural.

$$\Delta = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Cada determinante de segundo orden, factor de uno de los elementos considerados, se llama *menor correspondiente* a dicho elemento, y el producto algebraico de un elemento por su menor, se denomina *complemento algebraico* de este elemento.

Simbolizando por Ma_1, Ma_2, Ma_3, los menores correspondientes a los elementos a_1, a_2, a_3, respectivamente, puede escribirse:

$$\Delta = a_1Ma_1 - a_2Ma_2 + a_3Ma_3.$$

Si se hubieran puesto en factor los elementos de la segunda columna se habría obtenido:

$$\Delta = -b_1Mb_1 + b_2Mb_2 - b_3Mb_3.$$

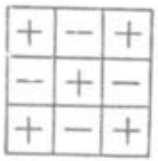
Si los de la tercera columna:

$$\Delta = c_1Mc_1 - c_2Mc_2 + c_3Mc_3.$$

Procediendo en forma análoga, se obtendría:

$$\Delta = a_1 Ma_1 - b_1 Mb_1 + c_1 Mc_1;$$

y así para los demás renglones.



Estos resultados evidencian que: *Un determinante de tercer orden es igual a la suma algebraica de los complementos algebraicos de los elementos de una línea cualquiera.*

Con respecto al signo que corresponde a cada complemento, puede tomarse el que indica el diagrama adjunto, o aplicar la siguiente regla: Se toma el signo + o el signo — según sea par o impar la suma de los números que indican el renglón y la columna a que pertenece el término que se considere.

Así, el signo del complemento algebraico correspondiente al término b_3 es —, porque la suma del número del renglón, 2, más el de la columna, 3, es un número impar.

492. **Observación.** El *menor correspondiente* a un elemento cualquiera se obtiene suprimiendo, en el determinante dado, los elementos de la columna y del renglón a que pertenece dicho elemento.

Así, el Mb_2 es el determinante formado por los elementos no tachados en la figura adjunta.

$$\begin{vmatrix} a_1 & \not{b}_1 & c_1 \\ \not{a}_2 & \not{b}_2 & \not{c}_2 \\ a_3 & \not{b}_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

493. **Reducción de un determinante.** Aplicando esta propiedad simultáneamente con la cuarta, se reduce un determinante de tercer orden a uno de segundo, multiplicado por un elemento del determinante dado.

Sea el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20 + 4 + 36 + 30 - 24 - 4 = 22.$$

Súmese a cada elemento de la primera columna el elemento correspondiente de la segunda:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 24 + 12 + 10 - 24 = 22.$$

Réstese de cada elemento de la segunda columna el duplo del elemento correspondiente de la tercera:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 11 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 6 & 11 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 11 = 22.$$

EJERCICIO 99

Simplifíquense los determinantes y calcúlese el valor.

1. $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 6 & -2 & 3 \\ 8 & 3 & -4 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 5 & 15 & -20 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 9 & 1 & -8 \\ -6 & 7 & 12 \end{vmatrix}$.

Redúzcase primero cada determinante al producto de un término por un determinante de segundo orden, y luego calcúlese su valor.

4. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ -3 & 9 & 8 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 11 \end{vmatrix}$.

7. Dados dos renglones, o dos columnas, de un determinante de tercer orden, escríbase el tercer renglón, o la tercera columna, de tal manera que el valor del determinante que se forme sea cero. (3 respuestas para cada caso).

VI. RESOLUCION DE UN SISTEMA DE 3 ECUACIONES SIMULTANEAS CON 3 INCOGNITAS

494. **Ejemplo.** Sean las ecuaciones *heterogéneas*

$$a_1x + b_1y + c_1z = n_1,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = n_2,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = n_3.$$

Para resolver este sistema, hay que hallar unas constantes tales que, multiplicando por ellas cada una de las ecuaciones dadas, se eliminen 2 incógnitas.

ELIMINACIÓN DE y Y DE z.

Sean α, β y γ, esas constantes cuyos valores se van a determinar en función de los coeficientes a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, etc.; se tiene:

$$\alpha a_1x + \alpha b_1y + \alpha c_1z = \alpha n_1,$$
$$\beta a_2x + \beta b_2y + \beta c_2z = \beta n_2,$$
$$\gamma a_3x + \gamma b_3y + \gamma c_3z = \gamma n_3.$$

Las incógnitas y y z se eliminarán si los valores de α, β, γ, son tales que se tenga:

$$\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = 0,$$
$$\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = 0.$$

Resolviendo este sistema (N° 479), considerando α, β, γ, como incógnitas, se obtiene:

$$\alpha = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \beta = -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Puesto que las incógnitas y y z se eliminan, queda:

$$x(\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3) = \alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3,$$

de donde: $$x = \frac{\alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3}{\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3}.$$

Sustituyendo α, β, γ, por sus valores sacados de (1), se obtiene:

$$x = \frac{n_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - n_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + n_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}},$$

$$x = \frac{n_1 b_2 c_3 - n_1 b_3 c_2 - n_2 b_1 c_3 + n_2 b_3 c_1 + n_3 b_1 c_2 - n_3 b_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1}.$$

El numerador, lo mismo que el denominador, son el desarrollo de un determinante de tercer orden; por tanto, el valor de x puede escribirse:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} n_1 & b_1 & c_1 \\ n_2 & b_2 & c_2 \\ n_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

ELIMINÁCIÓN DE x Y DE z.

Multiplicando cada una de las ecuaciones del sistema respectivamente por α', β', γ', constantes tales que eliminen x y z, se obtiene, procediendo en la misma forma que para eliminar y y z:

$$\alpha' a_1 x + \alpha' b_1 y + \alpha' c_1 z = \alpha' n_1,$$
$$\beta' a_2 x + \beta' b_2 y + \beta' c_2 z = \beta' n_2,$$
$$\gamma' a_3 x + \gamma' b_3 y + \gamma' c_3 z = \gamma' n_3.$$

$$\alpha' a_1 + \beta' a_2 + \gamma' a_3 = 0,$$
$$\alpha' c_1 + \beta' c_2 + \gamma' c_3 = 0.$$

$$\alpha' = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \beta' = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \gamma' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$y(\alpha' b_1 + \beta' b_2 + \gamma' b_3) = \alpha' n_1 + \beta' n_2 + \gamma' n_3,$$

$$y = \frac{\alpha' n_1 + \beta' n_2 + \gamma' n_3}{\alpha' b_1 + \beta' b_2 + \gamma' b_3}.$$

$$y = \frac{n_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - n_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + n_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{n_1 a_2 c_3 - n_1 a_3 c_2 - n_2 a_1 c_3 + n_2 a_3 c_1 + n_3 a_1 c_2 - n_3 a_2 c_1}{b_1 a_2 c_3 - b_1 a_3 c_2 - b_2 a_1 c_3 + b_2 a_3 c_1 + b_3 a_1 c_2 - b_3 a_2 c_1}.$$

Multiplicando por (-1) ambos términos del quebrado anterior y variando el orden de los factores, para tener el denominador de y igual al denominador de x, se tiene:

$$y = \frac{-a_2 n_1 c_3 + a_3 n_1 c_2 + a_1 n_2 c_3 - a_3 n_2 c_1 - a_1 n_3 c_2 + a_2 n_3 c_1}{-a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1}.$$

El numerador y el denominador son el desarrollo de un determinante de tercer orden; por tanto, el valor de y puede escribirse:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & n_1 & c_1 \\ a_2 & n_2 & c_2 \\ a_3 & n_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Siguiendo un procedimiento análogo, eliminando x y y, se obtendría para z el valor:

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & n_1 \\ a_2 & b_2 & n_2 \\ a_3 & b_3 & n_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Por los resultados anteriores se ve que:

En un sistema de 3 ecuaciones heterogéneas con 3 incógnitas, el valor de cada incógnita es igual a un quebrado que tiene por denominador el determinante del sistema, o sea el determinante de tercer orden que se forma con los coeficientes de las incógnitas; y por numerador el determinante que se deduce del denominador, sustituyendo la columna de los coeficientes de la incógnita por la columna de los términos independientes.

495. Aplicación. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 9x+4y-10z&=11,\\ -6x+12y-5z&=-9,\\ 3x+8y+15z&=-16. \end{aligned}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 11 & 4 & -10 \\ -9 & 12 & -5 \\ -16 & 8 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 4 & -10 \\ -6 & 12 & -5 \\ 3 & 8 & 15 \end{vmatrix}}=\frac{4\times5}{3\times4\times5}\times\frac{\begin{vmatrix} 11 & 1 & -2 \\ -9 & 3 & -1 \\ -16 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$x=\frac{1}{3}\times\frac{99+36+16-96+22+27}{27+8-1+6+6+6}=\frac{2}{3};$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 9 & 11 & -10 \\ -6 & -9 & -5 \\ 3 & -16 & 15 \end{vmatrix}}{3\times4\times5\times52}=\frac{3\times5}{3\times4\times5}\times\frac{\begin{vmatrix} 3 & 11 & -2 \\ -2 & -9 & -1 \\ 1 & -16 & 3 \end{vmatrix}}{52}$$

$$y=\frac{1}{4}\times\frac{-81-64-11-18-48+66}{52}=-\frac{3}{4}.$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 9 & 4 & 11 \\ -6 & 12 & -9 \\ 3 & 8 & -16 \end{vmatrix}}{3\times4\times5\times52}=\frac{3\times4}{3\times4\times5}\times\frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 11 \\ -2 & 3 & -9 \\ 1 & 2 & -16 \end{vmatrix}}{52}$$

$$z=\frac{1}{5}\times\frac{-144-44-9-33+54-32}{52}=-\frac{4}{5}.$$

EJERCICIO 100

Resolver los siguientes sistemas por medio de los determinantes.

1. $\begin{aligned} 4x+2y+3z&=4,\\ -3x-y-2z&=-6,\\ -2x-y-z&=-5. \end{aligned}$
2. $\begin{aligned} 2x+3y+z&=4,\\ x+2y+2z&=6,\\ 5x+y+4z&=21. \end{aligned}$
3. $\begin{aligned} 4x+5y-7z&=-8,\\ 3x-4y-2z&=25,\\ x+3y+z&=-9. \end{aligned}$
4. $\begin{aligned} 2x+5y-3z&=17,\\ 6x-2y-5z&=-3,\\ 3x+7y+4z&=-18. \end{aligned}$
5. $\begin{aligned} 3x-5y+7z&=28,\\ 2x+6y-9z&=-23,\\ 4x-2y-5z&=9. \end{aligned}$
6. $\begin{aligned} x+2y-3z&=5,\\ 3x-22y+6z&=4,\\ 7x-6y-3z&=15. \end{aligned}$
7. $\begin{aligned} x+y+2z&=31,\\ x+z+2y&=32,\\ y+z+2x&=33. \end{aligned}$
8. $\begin{aligned} 2x-y+3z&=14,\\ 2y-z+3x&=24,\\ 2z-x+3y&=10. \end{aligned}$
9. $\begin{aligned} 8x+4y-3z&=6,\\ x+3y-z&=7,\\ 4x-5y+4z&=8. \end{aligned}$
10. $\begin{aligned} x+2y+3z&=24,\\ x+3y+5z&=31,\\ x+4y+9z&=42. \end{aligned}$

VII. DETERMINANTES DE 4º ORDEN

496. Observación. Las propiedades relativas a los determinantes de *tercer orden* existen también para los de *orden superior*, pero no se da aquí su demostración.

Para el desarrollo de estos determinantes no puede aplicarse la regla de Sarrus ni el otro procedimiento explicado para obtener el de un determinante de tercer orden.

497. Cálculo de un determinante de 4º orden. Sea el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Se ha demostrado que un determinante de tercer orden es igual a la suma algebraica de los complementos algebraicos de los elementos de una línea cualquiera, ya sea columna o renglón.

+	−	+	−
−	+	−	+
+	−	+	−
−	+	−	+

Según se ha dicho en el número anterior, esta propiedad, que es cierta para cualquier determinante, puede aplicarse a un determinante de 4º orden.

En este caso, el cuadro de los signos de los complementos de los elementos de una línea cualquiera, es el adjunto. Se tiene, por tanto, que el determinante puede desarrollarse así:

$$\Delta = a_1 Ma_1 - b_1 Mb_1 + c_1 Mc_1 - d_1 Md_1.$$

Desarrollando cada uno de los 4 determinantes de tercer orden, y multiplicando cada desarrollo por el factor indicado, se obtienen 24 términos, o sea un número de términos que, como sucede para todo determinante, es igual al *factorial* del número que indica el orden del determinante $(24 = 4!)$.

Pero en la práctica se prefiere *reducir a cero* todos los elementos de una misma línea, excepto uno, como se ha explicado para los determinantes de tercer orden, aplicando el principio expuesto en el Nº 489.

Ejemplo: Calcular el valor del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 15 & 9 & 2 & 14 \\ 16 & 8 & 3 & 17 \\ 33 & -5 & 8 & 38 \end{vmatrix}$$

1º Réstese de cada elemento de la primera columna el triple del elemento correspondiente de la tercera.

2º Súmese a cada elemento de la segunda columna el duplo del elemento correspondiente de la tercera.

3º Réstese de cada elemento de la cuarta columna el cuádruplo del elemento correspondiente de la tercera. Se obtiene así:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 15 & 9 & 2 & 14 \\ 16 & 8 & 3 & 17 \\ 33 & -5 & 8 & 38 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 13 & 2 & 6 \\ 7 & 14 & 3 & 5 \\ 9 & 11 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 13 & 6 \\ 7 & 14 & 5 \\ 9 & 11 & 6 \end{vmatrix};$$

$$\Delta = 756 + 462 + 585 - 756 - 495 - 546 = 6.$$

EJERCICIO 101

Hállese el valor de los determinantes siguientes:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 5 \\ -4 & 6 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 & 4 \\ 18 & 28 & 33 & 8 \\ 30 & 40 & 54 & 13 \\ 24 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix}$

Aplicando a un sistema de 4 ecuaciones heterogéneas con 4 incógnitas la misma regla que a un sistema de 2 y de 3 ecuaciones simultáneas, resuélvanse los sistemas siguientes:

5. $x + y + 3z + v = 14,$
$4x + 2y + z + v = 25,$
$2x + y + 3z - v = 16,$
$5x - 4y - z + v = 7.$

6. $3x + 2y + 4z - t = 13,$
$5x + y - z + 2t = 9,$
$2x + 3y - 7z + 3t = 14,$
$4x - 4y + 3z - 5t = 4.$

7. $2x + 5y + 3z + 4u = 23,$
$3x + 2y - 5u = -23,$
$5x - 7z + 6u = 19,$
$5y - 8z - 7u = -$

8. $7x + 4y - 3z = 0,$
$5x + 4y - 5z + 4u = 0,$
$2x - z + u = 0,$
$2x + 4y - z - 3u = -8.$

3

RAIZ CUADRADA Y RAIZ CUBICA

I. RAIZ CUADRADA DE UN BINOMIO DE LA FORMA $x + y\sqrt{z}$.

498. Condición necesaria. La raíz cuadrada de un binomio de la forma

$$x + y\sqrt{z}$$

puede hallarse siempre que sea posible transformarlo en trinomio cuadrado perfecto.

Efectivamente, si al binomio $x + y\sqrt{z}$ puede dársele la forma $a + 2\sqrt{ab} + b$, se tendrá:

$$\sqrt{x + y\sqrt{z}} = \sqrt{a + 2\sqrt{ab} + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

EJEMPLOS. — Extraer la raíz cuadrada de:

1º $10 - \sqrt{84}$.

Al segundo término puede dársele como coeficiente 2. Se tiene, en efecto:

$$10 - \sqrt{84} = 10 - 2\sqrt{21}.$$

Basta, ahora, hallar dos números cuya suma sea 10 y que tengan 21 por producto. Esos números son 7 y 3. Se tiene, por tanto:

$$\sqrt{10 - \sqrt{84}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{21} + 3} = \sqrt{7} - \sqrt{3}.$$

2º $32 + 5\sqrt{28}$.

Al término irracional puede dársele también como coeficiente 2, multiplicándolo por $\frac{2}{5}$; y para que no se altere el valor del binomio propuesto, multiplíquese por $\frac{5}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}}$ ese mismo término. Resulta:

$$32 + 5\sqrt{28} = 32 + 2\sqrt{175}.$$

Descompóngase el segundo radicando en 2 números, que den 175 por producto y 32 por suma.

Esos números son 25 y 7. De donde:

$$\sqrt{32 + 5\sqrt{28}} = \sqrt{25 + 2\sqrt{175} + 7} = 5 + \sqrt{7}.$$

De lo que precede se deduce la siguiente

499. Regla. Para obtener la raíz cuadrada de un binomio que contiene un término irracional:

1º *Transfórmese el término irracional de manera que su coeficiente sea* 2.

2º *Descompóngase el término racional en* 2 *partes, tales que su producto sea igual al radicando después de hecha la reducción anterior.*

3º *Extráigase la raíz cuadrada de cada una de las partes antedichas, y escríbanse los resultados separados por el signo del término irracional.*

EJERCICIO 102

Hallar la raíz cuadrada de:

1. $5 + 2\sqrt{6}$.
2. $7 + 2\sqrt{10}$.
3. $11 + 2\sqrt{30}$.
4. $13 + \sqrt{120}$.
5. $15 + \sqrt{224}$.
6. $49 + \sqrt{192}$.
7. $53 - 12\sqrt{10}$.
8. $47 - 4\sqrt{33}$.
9. $28 - 8\sqrt{6}$.
10. $20 - 6\sqrt{11}$.
11. $12 + \sqrt{108}$.
12. $75 - 3\sqrt{96}$.

II. RAIZ CUBICA DE UN POLINOMIO

500. Extracción de la raíz cúbica de un polinomio. 1º Sea extraer la raíz cúbica de $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Según se ha visto, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, en que a y b representan números o expresiones algebraicas cualesquiera.

La manera de formar los términos de este polinomio, sugiere cómo debe procederse para extraer la raíz cúbica de un polinomio dado, supuesto que sea cubo de otro polinomio.

Se extrae primero la raíz cúbica del primer término del polinomio, lo cual da a, cuyo cubo se resta de a^3.

El segundo término, $3a^2b$, es el triple producto del cuadrado del primer término de la raíz por el segundo; por tanto, para obtener el segundo término de ésta, basta dividir $3a^2b$ entre $3a^2$, lo cual da b.

Nótese que los términos 2º, 3º y 4º del radicando pueden escribirse:

$$(3a^2 + 3ab + b^2)b;$$

de donde, para saber si la raíz cúbica es exacta, escríbase el polinomio formado por el triple del cuadrado del primer término de la raíz, el triple producto de ese primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo, y luego multiplíqueselo por el segundo término obtenido para la raíz, y véase si el producto es igual al residuo.

Las operaciones pueden disponerse como sigue:

Radicando	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$a + b$	Raíz
− Cubo de a	$-a^3$		
	$+3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$3a^2$	Divisor
$-(3a^2 + 3ab + b^2)b$	$-3a^2b - 3ab^2 - b^3$	$3a^2 + 3ab + b^2$	
	0		

2º Extraer la raíz cúbica de

$$125 - 225x + 285x^2 - 207x^3 + 114x^4 - 36x^5 + 8x^6.$$

Disposición de las operaciones:

$125 - 225x + 285x^2 - 207x^3 + 114x^4 - 36x^5 + 8x^6$	$5 - 3x + 2x^2$
-125	
$-225x + 285x^2 - 207x^3 + 114x^4 - 36x^5 + 8x^6$	75
$+225x - 135x^2 + 27x^3$	$75 - 45x + 9x^2$
$+150x^2 - 180x^3 + 114x^4 - 36x^5 + 8x^6$	$75 - 90x + 27x^2$
$-150x^2 + 180x^3 - 114x^4 + 36x^5 - 8x^6$	$75 - 90x + 27x^2 +$
0	$3(5 - 3x)2x^2 + 4x^4$

El primer término de la raíz es 5, cuyo cubo se resta del radicando.

El cociente del primer término del primer residuo, $-225x$, entre el triple cuadrado de 5, es decir, entre 75, da $-3x$, que es el segundo término de la raíz.

El triple cuadrado del primer término de la raíz, más el triple producto de los términos ya obtenidos, más el cuadrado del segundo término, dan $75 - 45x + 9x^2$.

El producto de este polinomio por $(-3x)$ da:
$-225x + 135x^2 - 27x^3$.

Restando este resultado del primer residuo, se obtiene: $+150x^2 - 180x^3 + 114x^4 - 36x^5 + 8x^6$ como segundo residuo.

El cociente de este residuo entre el triple cuadrado de los dos primeros términos de la raíz, o sea, entre $3(5 - 3x)^2 = 75 - 90x + 27x^2$, da $2x^2$, que es el tercer término de la raíz.

Añadiendo a $75 - 90x + 27x^2$ el triple producto de $(5 - 3x)$ por $2x^2$ y, además, el cuadrado de $2x^2$, se obtiene: $75 - 90x + 27x^2 + 30x^2 - 18x^3 + 4x^4 = 75 - 90x + 57x^2 - 18x^3 + 4x^4$.

El producto de este polinomio por $2x^2$, da:

$$150x^2 - 180x^3 + 114x^4 - 36x^5 + 8x^6,$$

que, restado del segundo residuo, da cero como tercer residuo.

501. Regla. *Para extraer la raíz cúbica de un polinomio:*

1º *Ordénese el polinomio dado según potencias ascendentes o descendentes de una misma literal.*

2º *Hállese la raíz cúbica del primer término, y escríbase como primer término de la raíz.*

3º *Réstese el cubo de este primer término del cubo dado.*

4º *Divídase el primer término del residuo entre el triple del cuadrado del primer término de la raíz, y escríbase el cociente como segundo término de la raíz.*

5º *Añádase al primer divisor, es decir, al triple del cuadrado del primer término de la raíz, el triple producto de los dos primeros términos de la raíz y el cuadrado del segundo término de ésta.*

6º *Multiplíquese este resultado por el segundo término de la raíz, y réstese el producto del primer residuo.*

7º *Procédase de una manera análoga hasta obtener un residuo cero, o que no sea divisible entre el triple del cuadrado de la parte de raíz ya obtenida.*

EJERCICIO 103

Extraer la raíz cúbica de los polinomios siguientes:

1. $27m^3 - 54m^2n + 36mn^2 - 8n^3$.
2. $64x^3 - 144x^2r + 108xr^2 - 27r^3$.
3. $1 - 12x^3 + 48x^6 - 64x^9$.
4. $m^6 + 3m^5 + 6m^4 + 7m^3 + 6m^2 + 3m + 1$.
5. $1 - 6n + 21n^2 - 44n^3 + 63n^4 - 54n^5 + 27n^6$.
6. $8 - 60c + 174c^2 - 245c^3 + 174c^4 - 60c^5 + 8c^6$.
7. $r^6 + 6r^5s + 24r^4s^2 + 56r^3s^3 + 96r^2s^4 + 96rs^5 + 64s^6$.
8. $\frac{64}{x^3} - \frac{48}{x^2} + \frac{28}{x} - 9 + \frac{7x}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{27}$.

4

NUMEROS COMPLEJOS

I. DEFINICIONES Y PROPIEDADES

502. Definiciones. Puede decirse que: *Número imaginario es la indicación de la raíz de índice par de un número negativo;* y también: *es el producto de un número positivo o negativo cualquiera por la unidad imaginaria* i. ($i = \sqrt{-1}$).

Número complejo es la suma algebraica de un número real con un número imaginario.

Número imaginario puro es el complejo cuya parte real es cero.

503. Representación gráfica. Los *números complejos,* lo mismo que los *imaginarios puros,* pueden representarse gráficamente. Para ello, se trazan dos rectas perpendiculares, llamadas *ejes,* que determinan un plano, denominado *plano de complejos.* El *eje horizontal* es el eje de *valores reales,* y el *vertical,* el de *valores imaginarios.*

El valor real de un *complejo* se lleva en el eje horizontal, a la derecha del origen si es positivo, y a la izquierda si es negativo. El valor imaginario se lleva verticalmente, arriba del eje horizontal si es positivo, y abajo si es negativo.

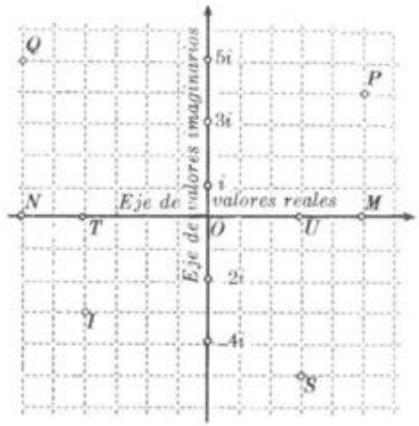


Fig. 69.

Así, para representar el complejo $5 + 4i$, cuéntense 5 divisiones en el eje horizontal, a partir de O, y se obtiene el punto M; levántese allí una perpendicular, y cuéntense en ella, a partir de M, 4 divisiones hacia arriba: se obtiene así el punto P, que es la representación gráfica o *afijo* del complejo dado (fig. 69).

Para representar el complejo $-6+5i$, cuéntense 6 divisiones a la izquierda de O en el eje horizontal, y se obtiene el punto N; levántese en N una perpendicular, y cuéntense 4 divisiones arriba del eje horizontal: se obtiene así el punto Q, representación gráfica o afijo del complejo propuesto.

Los *números imaginarios puros* se representan en el eje vertical, contando un número de divisiones igual al coeficiente de i, hacia arriba o hacia abajo, según que su signo sea positivo o negativo.

En la figura 69, se da la representación gráfica de los complejos $5+4i$, $-6+5i$, $-4-3i$, $3-5i$, i, $3i$, $5i$, $-2i$ y $-4i$.

Nota. — Puede observarse cómo la representación de los complejos es parecida a la de dos variables (x, y) en coordenadas cartesianas.

504. Raíz cúbica de 1, 8, 27, etc. Como se ha dicho ya, la raíz cúbica de los números algebraicos tiene tres valores diferentes, dos de los cuales son complejos, como se ve a continuación.

Sea resolver la ecuación $x^3=1$.

Puede escribirse, descomponiendo en factores:

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

Resolviendo las ecuaciones $x-1=0$ y $x^2+x+1=0$, se obtienen las raíces:

$$x_1=1,\quad x_2=\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}),\quad x_3=\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}).$$

Del mismo modo se resuelven las ecuaciones siguientes: $x^3=-8$, $x^3=27$, etc.

Así, se obtiene:

$$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4),$$
$$x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9),$$

cuyas raíces son, respectivamente:

$$x_1=-2,\quad x_2=1+\sqrt{-3},\quad x_3=1-\sqrt{-3}.$$
$$x_1=3,\quad x_2=\tfrac{3}{2}(-1+\sqrt{-3}),\quad x_3=\tfrac{3}{2}(-1-\sqrt{-3}).$$

505. Complejos iguales. Sean los complejos iguales

$$a+bi=c+di.$$

Se tiene: $$a-c=di-bi=(d-b)i.$$

Elévese al cuadrado:

$$(a-c)^2=-(d-b)^2,$$
$$(a-c)^2+(d-b)^2=0.$$

Cada uno de estos cuadrados es positivo, y puesto que su suma es 0, cada binomio debe ser nulo.

Por tanto: $$a=c,\quad d=b.$$

De ahí se deduce que: *Para que dos complejos sean iguales, es preciso que sus partes reales y los coeficientes de* i *sean respectivamente iguales; no puede haber compensación.*

506. Aplicación. Resolver $(4+i)x+(2-3i)y=2+11i$.

Desarróllese y póngase en factor:

$$4x+xi+2y-3yi=2+11i,$$
$$4x+2y+(x-3y)i=2+11i.$$

Iguálense las partes reales: $4x+2y=2.$ (1)

Iguálense los coeficientes de i: $x-3y=11.$ (2)

La resolución del sistema formado por (1) y (2) da:

$$x=2,\quad y=-3.$$

507. Complejos conjugados. *Números complejos conjugados son aquellos cuya parte real es idéntica, y el coeficiente de* i *sólo difiere por el signo.*

Así, $a+bi$ y $a-bi$ son complejos conjugados.

508. Módulo de un complejo. *La raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la parte real y del coeficiente de* i *es un número real, y se llama módulo del complejo.*

Así, el módulo del complejo $a+bi$ es $|\sqrt{a^2+b^2}|$; el de $12+5i$ es $|\sqrt{12^2+5^2}|=|\sqrt{144+25}|=|\sqrt{169}|=|13|$.

Dos complejos conjugados tienen módulos iguales.

EJERCICIO 104

Representar gráficamente:

1. $2+i$.
2. $4i-5$.
3. $-5i-3$.
4. $3-7i$.

Calcular las tres raíces cúbicas de:

5. $-1,\ 8,\ -27.$ 6. $64,\ -64.$

Calcular el módulo de los complejos siguientes:

7. $21 - 20i.$
8. $16 + 63i.$
9. $3 - 4i.$
10. $4 + 3i.$
11. $24 - 7i.$
12. $99 + 20i.$

Resolver, aplicando la propiedad de los complejos iguales:

13. $2x + 3xi - 3y + yi = i + 19.$
14. $(2 + 3i)x + (5i - 3)y - 4i = 9.$
15. $2xi + yi - x + y - 8i + 1 = 0.$
16. $x + xyi + y = 15 + 56i.$
17. $3m - 2n - 4 + (m^2 - n^2)i = 0.$

II. OPERACIONES CON LOS NUMEROS COMPLEJOS

509. **Suma de complejos.** 1º Sumar $a + bi$ con $a - bi.$

$$a + bi + a - bi = a + a + bi - bi = 2a.$$

Por tanto: *La suma de dos números complejos conjugados es un número real.*

2º Sumar $a + bi$ con $c + di.$

$$a + bi + c + di = a + c + bi + di = (a + c) + (b + d)i.$$

Por consiguiente: *La suma de dos números complejos es otro complejo de la misma naturaleza que los sumandos.*

510. **Representación gráfica de la suma de dos complejos.** Sean los complejos $A = a + bi$ y $B = c + di.$

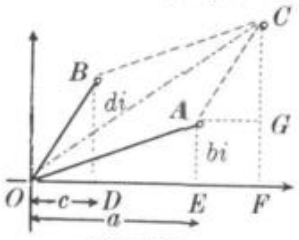


Fig. 70.

Represéntense estos complejos y trácese el paralelogramo $OACB$ (fig. 70).

Los triángulos ODB y AGC son iguales; por tanto:

$$EF = AG = OD = c;\quad GC = DB = di;$$
$$OF = OE + EF = a + c;$$
$$FC = FG + GC = bi + di = (b + d)i.$$

Por donde se ve que la suma de estos dos complejos queda representada por el cuarto vértice de un paralelogramo, cuyos otros tres vértices son O, A y $B.$

511. **Resta de complejos.** 1º Restar $a - bi$ de $a + bi.$

$$a + bi - (a - bi) = a - a + bi + bi = 2bi.$$

Luego: *La diferencia de dos complejos conjugados es un número imaginario.*

2º Restar $c + di$ de $a + bi.$

$$a + bi - (c + di) = a - c + bi - di = (a - c) + (b - d)i.$$

De donde: *La diferencia de dos complejos es otro complejo de la misma naturaleza que los primeros.*

512. **Representación gráfica de la resta de dos complejos.** Sean los complejos $A = a + bi$ y $B = c + di.$

Después de representar los complejos A y B, trácese el triángulo OAB y complétese el paralelogramo $OBAD$ (fig. 71).

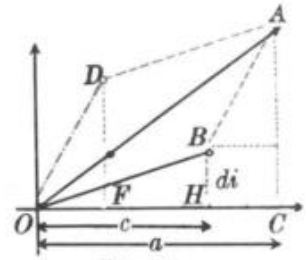


Fig. 71.

Los triángulos OFD y BEA son iguales; por tanto:

$$OF = BE = HC = OC - OH = a - c;$$
$$FD = EA = CA - CE = bi - di = (b - d)i.$$

Luego, se ve que la diferencia de estos complejos es el cuarto vértice de un paralelogramo, cuyos otros tres vértices son O, A y $B.$

Nota. — Por los resultados de los Nos. 510 y 512, se ve que la representación gráfica de la suma y de la resta de dos complejos es análoga a la suma y resta de dos vectores, tales como OA y OB (figs. 70 y 71), lo cual nada tiene de extraño, pues con frecuencia se representa un complejo por medio de un vector.

513. **Multiplicación de complejos.** 1º Multiplicar $a + bi$ por $a - bi.$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2.$$

Por tanto: *El producto de dos complejos conjugados es un número real y positivo, igual al cuadrado del módulo.*

2º Multiplicar $a+bi$ por $c+di$.

$$(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Luego: *El producto de dos complejos es otro complejo de la misma naturaleza que los factores.*

Nota. — Según se ha visto, la suma y el producto de dos complejos conjugados son números reales; por tanto, puede formarse una ecuación cuadrática de coeficientes reales y raíces complejas, de la forma

$$x^2+2ax+(a^2+b^2)=0,$$

cuyas raíces son: $a+bi$ y $a-bi$.

514. División de complejos. Sea dividir $a+bi$ entre $c+di$.

1er Procedimiento. Se tiene: $(a+bi):(c+di)=\frac{a+bi}{c+di}$.

Multiplíquense los dos términos del quebrado por el conjugado del denominador para que éste resulte real:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

2º Procedimiento. Póngase: $\frac{a+bi}{c+di}=u+vi$.

Con el objeto de simplificar las operaciones, considérense dos complejos de coeficientes numéricos, por ejemplo, $29+2i$ y $2-3i$.

De la igualdad $\frac{29+2i}{2-3i}=u+vi$,

se deduce: $29+2i=(u+vi)(2-3i)$.

Efectuando: $29+2i=(2u+3v)+(2v-3u)i$.

Siendo iguales los dos complejos, se puede escribir:

$$2u+3v=29, \quad (1)$$
$$2v-3u=2. \quad (2)$$

Resolviendo (1) y (2), se obtiene:

$$u=4, \quad v=7.$$

Por consiguiente:

$$(29+2i):(2-3i)=4+7i.$$

515. Potencia de un complejo. 1º Elevar $a+bi$ al cuadrado.

$$(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=a^2-b^2+2abi.$$

2º Efectuar: $(3-2i)^3$.

$$(3-2i)^3=27-54i+36i^2-8i^3=27-54i-36+8i=-9-46i.$$

3º Desarrollar: $(a+bi)^n$.

Aplíquese la fórmula del binomio; se obtiene:

$$a^n+na^{n-1}bi+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2i^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3i^3+\ldots$$

Sustituyendo i^2, i^3, i^4, i^5, etc., sucesivamente, por -1, $-i$, 1, i, etc., resulta:

$$a^n+na^{n-1}bi-\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3i+\ldots$$

516. Raíz de un complejo. Extraer la raíz cuadrada de $a+bi$.

Sea $x+yi$ la raíz pedida: $\sqrt{a+bi}=x+yi$.

Elévese al cuadrado: $a+bi=x^2+2xyi+y^2i^2$.

De donde:
$$x^2-y^2=a, \quad (1)$$
$$2xy=b. \quad (2)$$

Resolviendo (1) y (2), se obtiene la raíz pedida.

517. Aplicación. Extraer la raíz cuadrada de $3+4i$.

Sustitúyase en (1) y (2):
$$x^2-y^2=3, \quad (3)$$
$$2xy=4. \quad (4)$$

De (4) se deduce: $y=\frac{2}{x}$.

Sustitúyase este valor en (3): $x^2-\left(\frac{2}{x}\right)^2=3$,

$$x^4-3x^2-4=0. \quad (5)$$

Resuélvase: $x_1=\pm 2$, $x_2=\pm i$.

La solución $\pm i$ es inadmisible, porque se ha supuesto $\sqrt{a+bi}=x+yi$, en que x es real.

Por tanto: $y=\pm 1$.

Luego, las raíces pedidas son: $2+i$ y $-2-i$, o, combinadas en una sola expresión: $\pm(2+i)$.

Comprobación: $(2+i)^2=4+i^2+4i=3+4i$,
$(-2-i)^2=4+i^2+4i=3+4i$.

EJERCICIO 105

Efectuar las operaciones indicadas.

1. $(5i-4)+(4i-5)$.
2. $(3-5i)-(7-2i)$.
3. $(3-\sqrt{-4})(5+\sqrt{-9})$.
4. $(2-\sqrt{-5})(4-\sqrt{-16})$.
5. $(3-i\sqrt{2})(2-i\sqrt{3})$.
6. $(2+i\sqrt{3}):(2-i\sqrt{3})$.
7. $(3+2i\sqrt{5}):(3-2i\sqrt{5})$.
8. $\frac{1}{(1-i)^2}-\frac{1}{(1+i)^2}$.
9. $(2+i)^3+(2-i)^3$.
10. $\sqrt{-49}$.
11. $\sqrt{-x^{2n}}$.
12. $(3\sqrt{-4})^2$.
13. $\sqrt{-128}:\sqrt{-48}$.
14. $\frac{1-2i+3i^2}{1+2i+3i^2}$.
15. $(2+3i)^n$, con 5 términos.
16. $\sqrt{5+12i}$.
17. $\sqrt{24+7i}$.
18. $\sqrt{20-21i}$.
19. $\sqrt{7+24i}$.
20. $\sqrt{63-16i}$.

5

NOCIONES DE ANALISIS COMBINATORIO

I. PERMUTACIONES. ORDENACIONES. COMBINACIONES

518. Actos sucesivos. Si un producto p se puede obtener de m maneras distintas, y otro producto q, de n maneras diferentes, el producto $p \times q$ se puede obtener de $m \times n$ maneras.

Análogamente, si un acto, realizado de m modos, va seguido de otro, susceptible de verificarse de n modos, el número total de los actos es $m \times n$.

Así, el número 24 se obtiene multiplicando 24 por 1, 12 por 2, 8 por 3 y 6 por 4. A su vez, el número 18 resulta de multiplicar 18 por 1, 9 por 2 y 6 por 3. Como se ve, el primero se puede obtener de 4 maneras y el segundo de 3. Su producto, que es 432, deberá poderse obtener de $4 \times 3 = 12$ maneras.

En efecto, todos los productos siguientes son iguales a 432.

$24 \cdot 18 \cdot 1$	$12 \cdot 2 \cdot 18 \cdot 1$	$8 \cdot 3 \cdot 18 \cdot 1$	$6 \cdot 4 \cdot 18 \cdot 1$
$24 \cdot 9 \cdot 2$	$12 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2$	$8 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 2$	$6 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 2$
$24 \cdot 6 \cdot 3$	$12 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 3$	$8 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3$	$6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3$.

519. Permutaciones. Dados dos objetos o factores a, b, si se toman los dos a la vez, se pueden agrupar de dos maneras:

$$ab, \quad ba.$$

Si los objetos o factores dados son tres, a, b, c, y se agrupan tomándolos los tres a la vez, pueden agruparse de las 6 maneras siguientes:

$$a\begin{cases} bc \\ cb \end{cases} \qquad b\begin{cases} ac \\ ca \end{cases} \qquad c\begin{cases} ab \\ ba \end{cases}$$

Estas agrupaciones se llaman **permutaciones.**

Permutaciones de m *objetos son las agrupaciones de los* m *objetos tomados a la vez, de manera que dos agrupaciones difieran entre sí en el orden de los objetos.*

El número de permutaciones formadas con m objetos o factores, se simboliza por P_m.

520. Cálculo del número de permutaciones. Para determinar el número de *permutaciones* de los objetos a, b, c, puede servir la idea de actos sucesivos explicada antes.

El primer acto consiste en dar el primer lugar a cualquiera de los 3 objetos. Este lugar puede ser ocupado por a, por b o por c, es decir, de 3 maneras. El segundo lugar puede ocuparse de 2 maneras, puesto que quedan 2 objetos; por tanto, $3 \times 2 = 6$, son las maneras posibles de colocar en los dos primeros lugares 2 de los 3 objetos. Ocupados ya esos primeros lugares, sólo queda un objeto para ocupar el tercer lugar; por consiguiente, se pueden formar 6 agrupaciones distintas o permutaciones.

Aplicando la notación factorial, se puede escribir:

$$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

Como generalización, supóngase que sea m el número de objetos que se han de permutar.

El primer lugar de cada agrupación puede ocuparse de m maneras distintas; el segundo lugar, de $(m-1)$ maneras; por

tanto, el primero y el segundo se pueden ocupar de $m(m-1)$ maneras. El tercer lugar se puede ocupar, a su vez, de $(m-2)$ modos; por consiguiente, los tres primeros lugares se pueden ocupar de $m(m-1)(m-2)$ modos distintos, y así sucesivamente. Colocados ya los $(m-1)$ primeros objetos, el último lugar se podrá ocupar de una sola manera, pues sólo queda un objeto; por tanto, el número de agrupaciones de los m objetos tomados a la vez, es:

$$P_m = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = m!$$

COMPROBACIÓN:

Con los cuatro objetos, a, b, c, d se pueden formar las siguientes permutaciones en las que a ocupa el primer lugar.

$$ab\begin{cases} cd \\ dc \end{cases} \qquad ac\begin{cases} bd \\ db \end{cases} \qquad ad\begin{cases} bc \\ cb \end{cases}$$

lo cual da 6 agrupaciones. Como son tres objetos más que, sucesivamente, pueden ocupar el primer lugar, se obtiene en total un número de permutaciones igual a:

$$6 \times 4 = 24 = 4!$$

521. Ordenaciones. Sean tres objetos a, b, c. Si se toman 1, ó 2 ó 3 a la vez, se forman, sucesivamente, las siguientes agrupaciones:

$$a,\ b,\ c;$$
$$ab,\ ba,\ ac,\ ca,\ bc,\ cb;$$
$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Cada agrupación difiere de otra o por un objeto o por el orden. A estas agrupaciones se las llama **ordenaciones**; por tanto:

Ordenaciones con m *objetos, tomados* n *a la vez, son las diferentes agrupaciones que se pueden formar de manera que dos agrupaciones difieren en un objeto o en el orden de los objetos.*

Para indicar las ordenaciones de m objetos tomados de n en n, se escribe O_m^n.

522. Cálculo del número de ordenaciones. Se acaba de ver que el número de *ordenaciones* de 3 objetos tomados sucesivamente de 1 en 1, de 2 en 2 y de 3 en 3, son, respectivamente, 3, 6 y 6.

Generalizando con m objetos, el número de ordenaciones que se pueden formar con ellos tomando un objeto a la vez es, evidentemente, m, o sea:

$$O_m^1 = m.$$

Si se toman dos objetos en cada agrupación, según lo expuesto al hacer el cálculo de permutaciones, resulta:

$$O_m^2 = m(m-1),$$

y así sucesivamente.

El número de ordenaciones que se obtiene con m objetos tomados n a la vez es:

$$O_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1).$$

El número buscado consta de tantos factores como lo indica el número superior o pseudoexponente.

Así, $$O_7^3 = 7\cdot 6\cdot 5 = 210.$$

523. Combinaciones. *Llámanse* combinaciones *de* m *objetos, tomados* n *a la vez, las diferentes agrupaciones que pueden formarse, de tal manera que dos de dichas agrupaciones difieran entre sí en un objeto.*

Así, *abc* y *acb* no son dos combinaciones.

Con a, b, c, tomando dos a la vez, se tienen las tres combinaciones: *ab*, *ac*, *bc*.

Se ve claramente que hay más ordenaciones con m objetos, tomando n a la vez, que combinaciones, puesto que éstas dependen únicamente de la selección de los objetos, y no del orden en que se presentan.

El número de combinaciones que se pueden formar con m objetos, tomando n en cada agrupación, se indica así: C_m^n.

524. Cálculo del número de combinaciones. Sean m objetos, de los cuales intervienen n en cada agrupación, y sea C_m^n el número de *combinaciones* que con ellos se pueden formar. Supóngase, además, ya conocido ese número.

Si en cada combinación se permutan los n objetos de todas las maneras posibles, cada combinación da $n!$ permutaciones, y las C_m^n combinaciones dan $n! \times C_m^n$ permutaciones.

Pero este número de permutaciones es igual al de las ordenaciones que se pueden formar con los m objetos tomándolos n a la vez, pues dos agrupaciones diferirán en el orden de los objetos, si provienen de una misma combinación, o en un objeto, si provienen de combinaciones distintas; por tanto:

$$n! \times C_m^n = O_m^n;$$

de donde: $$C_m^n = O_m^n : n!$$

o sea: $$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n}.$$

525. Observación. El número de combinaciones de m objetos distintos y tomados de n en n, es decir, n cada vez, es igual al número de combinaciones de los mismos tomados de $m-n$ en $m-n$.

En efecto: sean m los objetos contenidos en una cajita. Cada vez que se sacan n de ellos, se forma una combinación de n objetos tomados de n en n. A cada una de estas combinaciones corresponde otra combinación de los $m-n$ objetos que quedan en la cajita, tomados de $m-n$ en $m-n$; por tanto:

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

II. APLICACION A LA FORMULA DEL BINOMIO

526. Desarrollo de un producto de m factores binomios.

Una de las aplicaciones de la teoría del análisis combinatorio es explicar el modo de formación de los coeficientes de los términos del desarrollo de un producto de factores binomios.

Sea el producto $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l)$.

En cada término del producto interviene un término de cada factor binomio. Si se toma x en cada uno, se obtiene x^m.

Si se toma x en $(m-1)$ factores, para tener el término del producto se tendrá que completar con la literal diferente de x del factor binomio restante, y sumar esos productos. Así, los productos parciales que se obtienen son de la forma

$$x^{m-1}a, \quad x^{m-1}b, \quad x^{m-1}c, \ldots x^{m-1}l,$$

que sumados dan el segundo término del producto, o sea:

$$x^{m-1}a + x^{m-1}b + \ldots + x^{m-1}l = x^{m-1}(a+b+\ldots+l) = x^{m-1}S_1,$$

en que S_1 representa la suma de las combinaciones que pueden hacerse con las m literales $a, b, c, \ldots, l$, tomadas de 1 en 1, o sea:

$$S_1 = C_m^1.$$

Para obtener el tercer término del producto, habrá que tomar x en $(m-2)$ factores y las literales distintas de x en los dos factores binomios restantes, de todos los modos posibles, y luego sumar estos productos parciales, que serán de la forma

$$x^{m-2}ab, \quad x^{m-2}ac, \ldots, \quad x^{m-2}al, \quad x^{m-2}bc, \ldots, \text{ etc.}$$

Por tanto, el tercer término del producto de los binomios es la suma

$$x^{m-2}ab + x^{m-2}ac + \ldots + x^{m-2}al + x^{m-2}bc + \ldots + x^{m-2}bl + \ldots$$
$$= x^{m-2}(ab + ac + \ldots + bc + \ldots + bl + \ldots) = x^{m-2}S_2,$$

en que $S_2 = C_m^2$, es decir, S_2 representa el número de combinaciones que pueden formarse con las literales $a, b, c, \ldots l$, tomadas de 2 en 2.

Por medio de consideraciones análogas, se llega, por fin, al siguiente resultado:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l)$$
$$= x^m + x^{m-1}S_1 + x^{m-2}S_2 + \ldots + x^{m-n}S_n + \ldots S_m.$$

EJEMPLOS:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + x^2(a+b+c) + (ab+ac+bc) + abc.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + x^3(a+b+c+d)$$
$$+ x^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) + x(abc+abd+acd+bcd) + abcd$$

527. Desarrollo de $(x+a)^m$. Si, en los desarrollos anteriores, los segundos términos de los binomios son iguales al término a, resulta que:

En S_1 cada sumando es a, o sea:

$$S_1 = ma.$$

En S_2 cada sumando es a^2, y como el número de esos sumandos es igual al de combinaciones que se pueden hacer con m factores tomados de 2 en 2, se tiene que

$$S_2 = C_m^2\, a^2 = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\, a^2.$$

En S_3 cada sumando es a^3, y su número es igual al de las combinaciones que se pueden hacer con m factores tomados de 3 en 3; se tiene, por tanto:

$$S_3 = C_m^3\, a^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\, a^3.$$

Del mismo modo:

$$S_n = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n}\, a^n.$$

En el último término no interviene x; por consiguiente:

$$S_m = a^m.$$

Luego, el desarrollo del binomio $(x+a)^m$ es:

$$x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}a + \frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}a^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^{m-3}a^3$$
$$+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{n!}x^{m-n}a^n+\ldots+a^m.$$

528. Observaciones. 1ª En el último ejemplo del Nº 526, haciendo $a=b=c=d$, se ve que:

$$S_1 = C_4^1\, a = \frac{4}{1}\, a = 4a.$$
$$S_2 = C_4^2\, a^2 = \frac{4\times 3}{2}\, a^2 = 6a^2.$$
$$S_3 = C_4^3\, a^3 = \frac{4\times 3\times 2}{1\times 2\times 3}\, a^3 = 4a^3.$$

2ª *Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales.*

En efecto, por lo expuesto en el Nº 525, se tiene:

$$1 = C_m^m;$$
$$C_m^1 = C_m^{m-1};$$
$$C_m^2 = C_m^{m-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

Por consiguiente, al efectuar el desarrollo de un binomio, basta calcular los coeficientes de la mitad de los términos, si m es impar, o hasta el término medio si m es par, es decir, calcular hasta que se tenga:

$$m - n \geqq \frac{n+1}{2}.$$

EJERCICIO 106

1. Si se tiran 3 monedas al suelo, ¿de cuántos modos pueden caer?

2. Tres personas van en un tren en el que hay 6 ventanillas libres. ¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar, si no han de estar en la misma ventanilla?

3. Con 7 banderas de colores diferentes se hacen señales colocándolas en una asta y tomando 4 a la vez. ¿Cuántas señales se pueden hacer?

4. ¿Cuántos números se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, sin pasar de 1 000, si la misma cifra no se ha de repetir en el mismo número?

5. ¿Cuántos números pares se pueden formar con los dígitos 3, 6, 9, 4?

6. Se tienen 6 gramáticas y 5 aritméticas de distintos autores, colocadas en el mismo estante. ¿De cuántas maneras se pueden colocar, sabiendo que los libros de la misma clase han de quedar juntos?

7. ¿Cuántas permutaciones distintas se pueden formar con las letras de la palabra *rato*? ¿Cuántas con las de la palabra *rara*? ¿Qué relación hay entre el número de permutaciones obtenidas en cada caso?

8. ¿Cuántas permutaciones distintas se pueden hacer con las letras de la palabra *comodoro*? ¿Cuántas permutaciones habrá en que las cuatro *o* estén juntas?

9. ¿Cuántas combinaciones se obtienen con 8 factores, tomando 3 a la vez?

10. Recordando que 2 puntos bastan para determinar la posición de una recta, ¿cuántas rectas quedan determinadas con 9 puntos, supuesto que nunca hay 3 alineados?

11. Calcúlese n en las igualdades $C_n^2 = 36$, y $C_n^4 = C_n^2$.

12. Si $O_m^n = 210$, y $C_m^n = 105$, hállese el valor de m y de n.

13. En una clase hay 8 buenos jugadores de basket-ball, todos igualmente hábiles. ¿De cuántas maneras distintas puede seleccionarse una quinta?

6

RESOLUCION DE LA ECUACION DE TERCER GRADO

529. Obtención de la fórmula. Sea resolver la ecuación

$$x^3 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Hágase $x = u + v$ y sustitúyase en (1). Puede escribirse, sucesivamente:

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + bx + c = 0,$$
$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + bx + c = 0,$$
$$u^3 + v^3 + x(3uv + b) + c = 0.$$

Si $3uv + b = 0$, se puede escribir:

$$u^3 + v^3 = -c, \qquad (2)$$
$$uv = -\frac{b}{3}, \quad u^3v^3 = -\frac{b^3}{27}. \qquad (3)$$

Por (2) y (3) se conoce la suma de dos números, $-c$, y su producto, $-\frac{b^3}{27}$; puede, por tanto, formarse una ecuación cuadrática en z, cuyo coeficiente medio sea dicha suma con signo contrario, y por término independiente el producto de esos números:

$$z^2 + cz - \frac{b^3}{27} = 0,$$

$$z = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}},$$

$$z_1 = u^3 = -\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}, \quad z_2 = v^3 = -\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}.$$

Como $x = u + v$, se tiene, extrayendo raíz cúbica:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}.$$

Esta es la fórmula Tartaglia–Cardano, publicada por este último en 1545, pero no con símbolos algebraicos.

Aplicando esta fórmula se obtiene una sola raíz, x_1. Para calcular las demás, basta resolver la cuadrática que resulta de dividir la ecuación cúbica entre $x - x_1$, o bien tomar $x_2 = \omega u + \omega^2 v$, $x_3 = \omega v + \omega^2 u$, en que $\omega = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\omega^2 = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$, raíces cúbicas segunda y tercera de 1.

530. Aplicación. Resolver la ecuación $x^3 - 9x - 28 = 0$.

$$b = -9, \quad c = -28.$$

$$x = \sqrt[3]{14 + \sqrt{196 - \frac{729}{27}}} + \sqrt[3]{14 - \sqrt{196 - \frac{729}{27}}},$$

$$x = \sqrt[3]{14 + \sqrt{196 - 27}} + \sqrt[3]{14 - \sqrt{196 - 27}},$$

$$x = \sqrt[3]{14 + 13} + \sqrt[3]{14 - 13} = 3 + 1 = 4.$$

Obtención de las otras dos raíces. — Divídase la ecuación dada entre $x - 4$:

$$(x^3 - 9x - 28) : (x - 4) = x^2 + 4x + 7.$$

Las raíces de $x^2+4x+7 = 0$, son: $x = -2 \pm \sqrt{4-7} = -2 \pm i\sqrt{3}$.

Por tanto, las raíces de $x^3 - 9x - 28 = 0$, son:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -2 + i\sqrt{3}, \quad x_3 = -2 - i\sqrt{3}.$$

Este mismo resultado se habría obtenido aplicando el segundo procedimiento indicado, o sea:

$$x_2 = \frac{3}{2}(-1+i\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}) = -\frac{3}{2} + \frac{3i}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} = -2 + i\sqrt{3},$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}) + \frac{3}{2}(-1-i\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} - \frac{3i}{2}\sqrt{3} = -2 - i\sqrt{3}.$$

531. Observaciones. 1ª Si $\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27} > 0$, la ecuación cúbica tiene una raíz real y dos complejas, como se ve en el ejemplo anterior.

Si $\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27} < 0$, la aplicación de la fórmula Tartaglia–Cardano da, para los radicales de tercer orden, valores complejos conjugados, cuya suma, por tanto, es real.

Así, dada la ecuación $x^3 - 19x + 30 = 0$, se obtiene:

$$x = \sqrt[3]{-15 + \sqrt{225 - \frac{6\,859}{27}}} + \sqrt[3]{-15 - \sqrt{225 - \frac{6\,859}{27}}},$$

$$x = \sqrt[3]{-15 + i\sqrt{\frac{784}{27}}} + \sqrt[3]{-15 - i\sqrt{\frac{784}{27}}}.$$

Este es el caso que fué llamado "caso irreducible", y se presenta siempre que la ecuación tiene tres raíces reales.

Cuando esto sucede, para hallar una de las raíces, búsquense divisores de la forma $x \pm a$ al polinomio que forma el primer miembro de la ecuación.

Con respecto a la ecuación $x^3 - 19x + 30 = 0$, estos divisores pueden ser:

$$x \pm 1, \quad x \pm 2, \quad x \pm 3, \quad x \pm 5, \quad x \pm 6, \text{ etc.}$$

$P(1) = 1 - 19 + 30 \neq 0$; $x - 1$ no es divisor;

$P(-1) = -1 + 19 + 30 \neq 0$; $x + 1$ no es divisor;

$P(2) = 8 - 38 + 30 = 0$; $x - 2$ es divisor; 2 es raíz de la ecuación.

Sígase así hasta hallar las tres raíces, o bien, divídase $x^3 - 19x + 30 = 0$ entre $x - 2$ y resuélvase la ecuación que se obtenga:

$$(x^3 - 19x + 30) : (x - 2) = x^2 + 2x - 15.$$

Las raíces de $x^2 + 2x - 15 = 0$, son:

$$x = -1 \pm \sqrt{1 + 15} = -1 \pm 4;$$

y las de la ecuación propuesta, $x^3 - 19x + 30 = 0$:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -5.$$

2ª Si la ecuación propuesta tiene término en x^2, transfórmese en otra que no contenga ese término, procediendo como se explica a continuación.

Sea la ecuación $x^3 - 3x^2 - 6x - 20 = 0$.

Póngase $x = z + h$, en que h es una constante por determinar, y sustitúyase.

$$(z + h)^3 - 3(z + h)^2 - 6(z + h) - 20 = 0,$$
$$z^3 + 3z^2h + \ldots - 3z^2 - \text{etc.} = 0,$$
$$z^3 + (3h - 3)z^2 + \ldots = 0.$$

Si $3h - 3 = 0$, o sea $h = 1$, el término en z^2 desaparece, como se ve en seguida:

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 1 - 3z^2 - 6z - 3 - 6z - 6 - 20 = 0,$$

o, después de reducir: $z^3 - 9z - 28 = 0$, ecuación ya resuelta.

$$z_1 = 5, \quad z_2 = -1 + i\sqrt{3}, \quad z_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Por tanto:

$x_1 = z_1 + 1 = 6$; $x_2 = z_2 + 1 = i\sqrt{3}$; $x_3 = z_3 + 1 = -i\sqrt{3}$.

Si se conviene en llamar p el coeficiente del término cuadrático, $h = -\frac{p}{3}$.

532. Ecuaciones numéricas de raíces inconmensurables. Newton dió un procedimiento para la resolución de las ecuaciones numéricas de grado superior al segundo. Su método, que aplica a la ecuación $y^3 - 2y - 5 = 0$, es como sigue:

Notó que una raíz de la ecuación difiere de 2 en menos de .1.

En efecto: si $y = 2$, $y^3 - 2y - 5 = 8 - 4 - 5 = -1$;

por tanto la raíz es mayor que 2:

si $y = 2.1$, $y^3 - 2y - 5 = 9.261 - 4.2 - 5 = .061$;

la raíz es menor que 2.1.

Para calcularla, hace $y = 2 + p$, y sustituye este valor en la ecuación dada:

$$8 + 12p + 6p^2 + p^3 - 4 - 2p - 5 = p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0. \quad (1)$$

Siendo p muy pequeño, desecha $p^3 + 6p^2$, y escribe: $10p \doteq 1$; de donde: $p \doteq .1$. ($\doteq$, léase: igual aproximadamente).

Hace luego $.1 + q = p$, y sustituye en (1):

$$q^3 + 6.3q^2 + 11.2399q + .061 = 0. \quad (2)$$

Desecha q^3 y $6.3q^2$ por su pequeñez, y obtiene: $q = -.0054$.

Hace por fin $-.0054 + r = q$ y sustituye en (2),

o simplemente en $6.3q^2 + 11.2399q + .061 = 0$, y obtiene:

$$6.3r^2 + 11.16196r + .000541708 = 0;$$

de donde, desechando $6.3r^2$: $r \doteq \frac{-.000541708}{11.16196} = -.00004853$.

Por tanto, una raíz es, aproximadamente:

$$y \doteq 2.1 - .0054 - .00004853 = 2.09455157.$$

Este método fué perfeccionado posteriormente por Horner.

533. Aplicación de este procedimiento a la raíz cuadrada. Puede aplicarse este procedimiento a la extracción de raíces cuadradas, calculadas por aproximaciones sucesivas.

Sea extraer la raíz cuadrada de 20.

Puede escribirse: $\sqrt{20} \doteq 4$.

Póngase: $\sqrt{20} = 4 + a$.

Elévese al cuadrado: $20 = 16 + 8a + a^2$; $a^2 + 8a = 4$.

Desechando el término a^2, por su pequeñez: $8a \doteq 4$; $a \doteq .5$; de donde: $\sqrt{20} \doteq 4 + .5 = 4.5$.

Póngase: $\sqrt{20} = 4.5 + b$ y elévese al cuadrado:

$$20 = 20.25 + 9b + b^2; \quad b^2 + 9b = -.25.$$

Desechando el término b^2: $9b \doteq -.25$; $b \doteq -\frac{.25}{9} \doteq -.02$.

Por tanto: $\sqrt{20} \doteq 4.5 - .02 = 4.48$.

Póngase $\sqrt{20} = 4.48 + c$ y elévese al cuadrado:

$$20 = 20.0704 + 8.96c + c^2; \quad c^2 + 8.96c = -.0704.$$

Desechando c^2, queda: $8.96c \doteq -.0704$; $c \doteq -\frac{.0704}{8.96} \doteq -.007$.

Por tanto: $\sqrt{20} \doteq 4.48 - .007 = 4.473$.

Calculando $\sqrt{20}$ por el procedimiento ordinario, se obtiene:

$$\sqrt{20} = 4.4721.$$

Sea, como otro ejemplo, extraer la raíz cuadrada de 15.

$\sqrt{15} \doteq 4$.

$\sqrt{15} = 4 + a$; $15 = 16 + 8a + a^2$; $a \doteq -\frac{1}{8} \doteq -.1$.

$\sqrt{15} \doteq 4 - .1 = 3.9$.

$\sqrt{15} = 3.9 + b$; $15 = 15.21 + 7.8b + b^2$; $b \doteq -\frac{.21}{7.8} \doteq -.02$.

$\sqrt{15} \doteq 3.9 - .02 = 3.88$.

$\sqrt{15} = 3.88 + c$; $15 = 15.0544 + 7.76c + c^2$; $c \doteq -\frac{.0544}{7.76} \doteq -.007$.

$\sqrt{15} \doteq 3.88 - .007 = 3.873$.

EJERCICIO 107.

Resolver las ecuaciones siguientes:

1. $x^3 + 15x + 124 = 0$.
2. $x^3 - 27x - 54 = 0$.
3. $x^3 - 6x^2 - 33x - 70 = 0$.
4. $x^3 - 9x^2 + 63x + 73 = 0$.
5. $x^3 - 7x = 6$.
6. $x^3 - 15x - 4 = 0$.
7. $x^3 + 72x - 1720 = 0$.
8. $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$.
9. $x^3 - 6x^2 + 3x + 18 = 0$.
10. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.
11. $x^3 - 11x + 20 = 0$.
12. $x^3 - 18x = 35$.
13. $x^3 - 28x - 48 = 0$.
14. $x^3 + 6x = 20$.

7

FRACCIONES PARCIALES

534. Preliminares.

De $\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x+5}$ obtenemos sumando

$$\frac{3(x+5) - (x-4)}{(x-4)\ (x+5)} = \frac{x+23}{x^2+x-20}$$

O sea $\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x+5} = \frac{x+23}{x^2+x-20}$

Inversamente debemos tener:

$$\frac{x+23}{x^2+x-20} = \frac{3}{x-4} - \frac{2}{x+5} \qquad (1)$$

El primer miembro de (1) es la fracción primitiva; el segundo miembro, las fracciones parciales.

Una fracción es propia cuando el grado del numerador es inferior al grado del denominador.

Si A, B, C etc., son coeficientes los diversos grados de polinomios en x pueden representarse como sigue:

polinomio de grado cero: A
de primer grado: $Ax + B$
de segundo grado: $Ax^2 + Bx + C$
de tercer grado: $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
. . . . . .

en que los coeficientes pueden ser cero, excepción hecha del primero.

Haciendo referencia a (1) se ha transformado una fracción racional en otras cuyo denominador es de grado inferior al denominador de la fracción dada.

535. Transformación de fracciones.

a) La fracción $\dfrac{x^3+4x^2+4x-3}{x^2+x-2}$ (2)

puede transformarse a forma mixta efectuando la división:

$$= x + 3 + \frac{3x+3}{x^2+x-2}$$

b) La parte fraccionaria de la expresión anterior puede, a su vez, expresarse como suma de dos fracciones de grado inferior:

$$\frac{3x+3}{(x-1)(x+2)} = \frac{2x+4+x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{2(x+2)+(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2}$$

y teniendo en cuenta a (2) se puede escribir

$$\frac{x^3+4x^2+4x-3}{x^2+x-2} = x + 3 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2}$$

c) La fracción propia $\dfrac{x^2-10x-16}{x^3+3x^2-4x}$ es equivalente a la suma $\dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{x-1} + \dfrac{2}{x+4}$, en que los denominadores de las tres últimas expresiones son los factores reales de x^3+3x^2-4x.

d) En cambio el quebrado $\dfrac{2x+3}{x^2+4x+6}$ cuyo denominador no tiene factores reales no puede ser expresado en fracciones de denominador de grado inferior. Haciendo uso del común denominador se tiene:

$$\frac{2x+3}{x^2+4x+6} = \frac{2x}{x^2+4x+6} + \frac{3}{x^2+4x+6}$$

Unicamente las fracciones cuyo denominador tiene factores reales y racionales pueden expresarse como suma de fracciones parciales con denominador de grado inferior.

EJERCICIO 108

Dígase si son transformables en fracciones parciales las siguientes expresiones, indicando el motivo.

1. $\dfrac{2x+3}{(x-1)(x+5)}$
2. $\dfrac{3x-2}{x(x+7)(x-9)}$
3. $\dfrac{4}{(x-8)(x+1)(x+5)}$
4. $\dfrac{13x+7}{x^2-6x-16}$
5. $\dfrac{x+1}{x^2+9x+17}$
6. $\dfrac{2x-5}{x^2-6x+1}$
7. $\dfrac{5x+1}{x^{2/3}-x^{1/3}-12}$
8. $\dfrac{5x^3+7x^2-3}{x^2+16x+28}$
9. $\dfrac{8x^4-6x+2}{x(x-5)(x+2)}$
10. $\dfrac{5x^5-8x^3+x-1}{(x+2)^3(x+4)}$
11. $\dfrac{8x+4}{x^3+2x^2-x-2}$
12. $\dfrac{5x^3-8x^2+3}{(x^2-4x+8)(x^2-6x+10)}$
13. $\dfrac{x^2+4x-4}{2x^3-8x}$
14. $\dfrac{x-7}{x^2+8x+20}$
15. $\dfrac{x^2+1}{6x^2-x-1}$
16. $\dfrac{9x+2}{(3x-2)(5x+4)}$
17. $\dfrac{2x^3+3}{x^4+1}$
18. $\dfrac{2}{(3x-5)^2(x+1)^3}$
19. $\dfrac{4x+6.5}{6x^2+7x+2}$
20. $\dfrac{x^3}{x^{9/2}-x^{1/2}}$

536. Casos y métodos de transformación.

1er. Caso. *Los factores del denominador son todos de primer grado y ninguno se repite.*

a) *Método de igualación de los coeficientes.*

Sea la fracción $\dfrac{ax+b}{(x+c)(x+d)}$ de la cual se desean obtener las fracciones parciales cuya suma sea equivalente.

Escríbase $\dfrac{ax+b}{(x+c)(x+d)} = \dfrac{A}{x+c} + \dfrac{B}{x+d}$ (3)

en que A y B son constantes por determinar. A y B son de grado cero porque los denominadores son de primer grado.

Quítense los denominadores en (3) para lo cual multiplíquense ambos miembros por $(x+c)(x+d)$;

$$ax+b=A(x+d)+B(x+c) \qquad (4)$$

o sea $$ax+b=(A+B)x+Ad+Bc \qquad (5)$$

Como (5) es una identidad respecto de x, iguálense los coeficientes de los términos de mismo grado en ambos miembros.

$$\left.\begin{array}{ll} 1^{er}.\text{ grado en } x & a=A+B \\ \text{grado cero en } x & b=Ad+Bc \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Resolviendo el sistema (6) se obtiene:

$$A=\frac{ac-b}{c-d} \quad \text{y} \quad B=\frac{ad-b}{d-c} \qquad (7)$$

Estos valores substituidos en (3) dan:

$$\frac{ax+b}{(x+c)(x+d)}=\frac{\frac{ac-b}{c-d}}{x+c}+\frac{\frac{ad-b}{d-c}}{x+d} \qquad (8)$$

Los numeradores del segundo miembro son de grado cero respecto a x; son valores numéricos por ejemplo g y h.

Por consiguiente (7) se puede escribir:

$$\frac{ax+b}{(x+c)(x+d)}=\frac{g}{x+c}+\frac{h}{x+d}$$

b) *Método de evaluación.*

Si en la ecuación (4)

$$ax+b=A(x+d)+B(x+c)$$

se hace: 1º $x+d=0$ o sea $x=-d$, se obtiene:

$$a(-d)+b=A(-d+d)+B(-d+c)$$

o sea: $$B=\frac{b-ad}{c-d}=\frac{ad-b}{d-c}$$

2º $x+c=0$ o sea $x=-c$, se obtiene:

$$a(-c)+b=A(-c+d)+B(-c+c)$$

o sea $$A=\frac{b-ac}{d-c}=\frac{ac-b}{c-d}$$

Estos resultados son los ya obtenidos: (7).

537. Aplicaciones.

1º Descomponer la fracción $\frac{6}{x^2-9}$

a) *Método de los coeficientes.*

Factorizando el denominador y escribiendo una fracción parcial por cada factor, se tiene:

$$\frac{6}{x^2-9}=\frac{6}{(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}$$

Quitando denominadores:

$$6=A(x+3)+B(x-3)$$
$$6=(A+B)x+3A-3B \qquad (9)$$

Teniendo en cuenta que en el primer miembro hay cero x, e igualando los coeficientes de los términos de mismo grado en ambos miembros, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 0=A+B \\ 6=3A-3B \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Resolviendo el sistema (10) se obtiene

$$A=1 \quad \text{y} \quad B=-1$$

de donde $$\frac{6}{x^2-9}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}$$

b) *Método de evaluación.*

Procédase como en el método de los coeficientes hasta la ecuación (9) y en ella hágase sucesivamente la x igual a $+3$ y a -3.

$$6=A(x+3)+B(x-3)$$

se tiene $$6=A(3+3)+B(3-3)$$

o sea $$1=A$$

$$6=A(-3+3)+B(-3-3)$$

o sea $$-1=B$$

Los valores de A y de B son los anteriormente encontrados.

2º Descomponer la fracción $\dfrac{6x^2-7x-8}{x^3+x^2-2x}$

a) *Método de los coeficientes.*

Siguiendo pasos similares a los del ejemplo 1º se obtiene sucesivamente:

$$\frac{6x^2-7x-8}{x^3+x^2-2x}=\frac{6x^2-7x-8}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$6x^2-7x-8=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x=1).$$
$$6x^2-7x-8=(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Segundo grado} & 6=A+B+C\\ \text{Primer grado} & -7=A+2B-C\\ \text{Grado Cero} & -8=-2A\end{array}\right\} \quad (12)$$

De donde $A=4$, $B=-3$ y $C=5$ (13)
y por consiguiente:

$$\frac{6x^2-7x-8}{x^3+x^2-2x}=\frac{4}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{5}{x+2}$$

b) *Método de evaluación.*

Si en (11)
$6x^2-7x-8=A(x-1)(x-2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$
se dan a las x sucesivamente los valores 0, 1 y -2 se obtiene:

$$6(0)^2-7(0)-8=A(0-1)(0+2)+B(0)(0+2)+C(0)(0-1)$$
$$6(1)^2-7(1)-8=A(1-1)(1+2)+B(1)(1+2)+C(1)(1-1)$$
$$6(-2)^2-7(-2)-8=A(-2-1)(-2+2)+B(-2)(-2+2)+C(-2)(-2-1)$$

De donde: $A=4$, $B=-3$ y $C=5$ que son los valores ya obtenidos: (13).

2º Caso. *Los factores del denominador son todos de primer grado y alguno o algunos se repiten.*

Regla: Por cada grado del factor que se repite, escríbase una fracción. Los numerados de todas las fracciones serán de grado cero.

Un ejemplo numérico aclarará el procedimiento a seguir:

Descomponer la fracción $\dfrac{x^3(x-1)}{6x^3+x^2-11x+6}$

en sus fracciones parciales primitivas.

Escríbase:

$$\frac{6x^3+x^2-11x+6}{x^3(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}$$

Procédase por el método de los coeficientes que ya se ha visto:

$$6x^3+x^2-11x+6=Ax^2(x-1)+Bx(x-1)+C(x-1)+Dx^3 \quad (14)$$

de donde: $6x^3+x^2-11x+6=Ax^3-Ax^2-Bx-C+Dx^3+Bx^2+Cx$

y por consiguiente

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Tercer Grado} & 6=A+D\\ \text{Segundo Grado} & 1=A+B\\ \text{Primer Grado} & -11=-B+C\\ \text{Grado Cero} & 6=-C\end{array}\right\} \quad (14)$$

El sistema (14) da: $A=$, $B=5$, $C=-6$ y $D=2$ y por lo tanto:

$$\frac{6x^3+x^2-11x+6}{x^3(x-1)}=\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3}+\frac{2}{x-1}$$

Observación: Si se hubiera empleado el método de evaluación ($x=0$, $x=1$) únicamente se hubieran encontrado los valores de C y de D; sería necesario recurrir al método de los coeficientes.

3er. Caso. *Los factores del denominador son de cualquier grado, repitiéndose o no algunos de ellos.*

Se trata del caso general.

Se ha visto que si el factor denominador es de primer grado, el numerador es de grado cero aunque dicho factor se repita.

Si el factor es de segundo grado, el numerador es de primer grado, aunque dicho factor se repita.

En general, a un factor denominador de grado n, le corresponde un numerador de grado $n-1$, aunque el factor denominador se repita.

Por cada grado del exponente del factor denominador que se repite, se escribe una fracción parcial.

Estas reglas quedarán aclaradas con los ejemplos numéricos.

1º Descompóngase en fracciones parciales

$$\frac{5x^4-24x^3+45x^2-38x+2}{(x-3)(x^2-2x+2)^2} \quad (15)$$

A la fracción de denominador $(x-3)$ le corresponde un numerador de grado cero, A.

A la fracción de denominador (x^2-2x+2) le corresponde un numerador de primer grado, $Bx+C$ y lo mismo a la fracción de denominador $(x^2-2x+2)^2$, es decir, que el numerador es $Dx+E$.

Se tiene que

$$(15) = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2} + \frac{Dx+E}{(x^2-2x+2)^2}$$

Procediendo por el método de los coeficientes se obtiene:

$$5x^4-24x^3+45x^2-38x+2 =$$
$$A(x^2-2x+2)^2+(Bx+C)(x-3)(x^2-2x+2) + (Dx+E)(x-3) \qquad (16)$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned}5x^4-24x^3+45x^2-38x+2 = {} & Ax^4-4Ax^3+8Ax^2-8Ax+4A \\ & +Bx^4-5Bx^3+8Bx^2-6Bx \\ & +Cx^3-5Cx^2+8Cx-6C \\ & +Dx^2-3Dx \\ & +Ex-3E\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de los términos de mismo grado en ambos miembros, resulta el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Cuarto Grado} & 5 = A+B \\ \text{Tercer Grado} & -24 = -4A-5B+C \\ \text{Segundo Grado} & 45 = 8A+8B-5C+D \\ \text{Primer Grado} & -38 = 8A-6B+8C-3D+E \\ \text{Grado Cero} & 2 = 4A-6C-3E \end{array}\right\}$$

La sclución del sistema es

$A=2$, $B=3$, $C=-1$, $D=0$ y $E=4$

Y por lo tanto la fracción propuesta es igual a

$$\frac{2}{x-3} + \frac{3x-1}{x^2-2x+2} + \frac{4}{(x^2-2x+2)^2}$$

Observación: Usando el método de evaluación $(x=3)$ sólo se obtendría el valor de A en (16) Se sobreentiende que solamente se emplean para x valores reales.

2º Dense las fracciones parciales de la expresión

$$\frac{-3x^5+11x^4-6x^3+18x^2-7x+7}{(x-1)^2(x^2+1)^2} \qquad (17)$$

Teniendo en cuenta la repetición de los factores en el denominador la fracción propuesta es

$$(17) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

Usando el método de los coeficientes se tiene sucesivamente:

$$-3x^5+11x^4-6x^3+18x^2-7x+7 =$$
$$A(x-1)(x^2+1)^2+B(x^2+1)^2+(Cx+D)(x-1)^2(x^2+1) + (Ex+F)(x-1)^2$$
$$\begin{aligned}-3x^5+11x^4-6x^3+18x^2-7x+7 = {} & Ax^5-Ax^4+2Ax^2-2Ax^2+Ax-A \\ & +Bx^4+2Bx^2+B \\ & +Cx^5-2Cx^4+2Cx^3-2Cx^2+Cx \\ & +Dx^4-2Dx^3+2Dx^2-2Dx+D \\ & +Ex^3-2Ex^2+Ex \\ & +Fx^2-2Fx+F\end{aligned}$$

El sistema resultante es:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Quinto Grado} & -3 = A+C \\ \text{Cuarto Grado} & 11 = -A+B-2C+D \\ \text{Tercer Grado} & -6 = 2A+2C+2D+E \\ \text{Segundo Grado} & 18 = -2A+2B-2C+2D-2E+F \\ \text{Primer Grado} & -7 = A+C-2D+E-2F \\ \text{Grado Cero} & 7 = -A+B+D+F \end{array}\right\}$$

Los valores de las incógnitas en el sistema anterior son:

$A=0$, $B=5$, $C=-3$, $D=0$, $E=0$ y $F=2$

Por lo tanto la fracción propuesta es equivalente a

$$\frac{0}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} + \frac{-3x+0}{x^2+1} + \frac{0x+2}{(x^2+1)^2}$$

o sea

$$\frac{5}{(x-1)^2} - \frac{3x}{x^2+1} + \frac{2}{(x^2+1)^2}$$

Observación. Usando el método de evaluación $(x = 1)$ sólo se hallaría el valor de la B.

Nota: El número de incógnitas que ha de resolverse en el sistema resultante de la igualación de los coeficientes es igual al grado del polimonio del denominador de la fracción que se ha de descomponer.

EJERCICIO 109

Descomponer, cuando sea posible, en fracciones parciales las expresiones siguientes.

1. $\dfrac{4}{x^2-1}$
2. $\dfrac{x-11}{x^2-x-12}$
3. $\dfrac{11x+7}{(2x-1)(x+2)}$
4. $\dfrac{x+19}{x^2+2x-8}$
5. $\dfrac{x^3+5x^2+x+13}{x^4+4x^2+3}$
6. $\dfrac{9}{x^3-1}$
7. $\dfrac{8}{x^4-1}$
8. $\dfrac{6}{x^3+1}$
9. $\dfrac{7x^2+12x-9}{x^2(x+3)}$
10. $\dfrac{x^2+2x+1}{(x^2+1)^2x}$
11. $\dfrac{4x^3-6x-1}{2x^3-x^2-x}$
12. $\dfrac{4x^3-x^2-3x-2}{x^2(x+1)^2}$
13. $\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)}$
14. $\dfrac{4}{1+2x+2x^2+2x^3+x^4}$
15. $\dfrac{18-5x-3x^2}{x(x-3)^2}$
16. $\dfrac{5x-3}{x^2-8x+20}$
17. $\dfrac{x^2}{x^2+1}$
18. $\dfrac{6}{(1+x^2)(2+x^2)}$
19. $\dfrac{7x^2-6x+3}{(x-3)^3}$
20. $\dfrac{2x^2-3x+7}{x(x-3)(x-4)}$

8

LOGICA MATEMATICA

538. **Proposiciones.** La expresión verbal o escrita de un juicio es una *proposición.* Toda proposición consta de tres partes: un *sujeto* del cual se dice algo o él hace algo; un *verbo* que indica un estado o una acción, y un *complemento* referido al verbo. Una proposición puede simbolizarse abreviadamente mediante una letra mayúscula.

Así: **P** El petróleo abunda en México.

Q La República Mexicana es país tercermundista.

En **P** el *sujeto* es *el petróleo,* el *verbo* es *abunda* y el *complemento* es *en México.*

539. **Clases de proposiciones.** Las proposiciones pueden ser:

Simples si sólo tienen *un* sujeto, *un* verbo y *un* complemento. En caso contrario son proposiciones *compuestas.*

Cerradas si tienen *determinado* el sujeto. *Abiertas* si no lo tienen determinado.

Afirmativas o *negativas:* según afirmen o nieguen.

Verdaderas o *falsas:* según correspondan o no a la realidad.

540. **Ejemplos:**

$18 = 12 + 6$ Es una proposición simple, cerrada, afirmativa y verdadera.

$x^2 \neq 20 + x$ Es una proposición simple, abierta, negativa.

$x + y = 15$ Es una proposición compuesta, abierta y afirmativa.

541. **Conectivos.** Para formar proposiciones compuestas se utilizan expresiones llamadas *conectivos* y son los siguientes: *conjunción, disyunción, condición* y *bicondición.* En el lenguaje común y corriente, se pueden indicar así:

Conjunción: **y** V. gr.: Venezuela exporta **e** importa a México.

Disyunción: **o** V. gr.: Venezuela importa **o** exporta a México.

Condición: **si... entonces** V. gr.: **Si** Venezuela importa, **entonces** México vende.

Bicondición: **si y sólo si** V. gr.: Venezuela exporta **si y sólo si** México compra.

542. Símbolos. Los conectivos pueden abreviarse usando los siguientes símbolos:

y se escribe $\wedge$; **o** se escribe $\vee$;

si... entonces se escribe $\Longrightarrow$; **si y sólo si** se escribe $\Longleftrightarrow$

EJERCICIO 110

1. Formar un cuadro con los siguientes encabezados: Nombre del conectivo, Palabras en lenguaje ordinario, Símbolo.

2. Dar dos ejemplos de proposiciones compuestas utilizando sucesivamente los cuatro conectivos estudiados.

3. Utilizando **V** para verdadero y **F** para falso, calificar las proposiciones que siguen:

A Alaska es una península.

B Bolivia colinda con el Pacífico.

C $18 = 9$ por 3

D $x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$

E $x^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1$

F Dos rectas que se cortan son coplanares.

G Todo triángulo es equilátero.

H Toda recta es ilimitada.

I El pentágono tiene 6 lados.

J $x^2 - 16 = 0$ no tiene solución.

4. Si la negación se expresa con el símbolo $\sim$, ¿qué indicaría $\sim$**P** , si **P** Las móneras son minerales?

5. Si Q $14 = 196^{1/2}$ es V , Q $14 \neq 196^{1/2}$ debe ser _____

6. Indicar simbólicamente que si una proposición es Verdadera, su negación es Falsa.

7. Indicar simbólicamente que si una proposición es Falsa, su negación es Verdadera.

8. Dadas las proposiciones:

A El tiempo mejora mañana.

B Marco escribirá un capítulo.

C La Editorial pagará bien.

D La lluvia vendrá pronto.

escribir las siguientes proposiciones compuestas:

$A \vee B$, $A \wedge C$, $A \vee D$, $B \wedge C$, $B \Longrightarrow D$, $C \Longrightarrow D$, $D \Longleftrightarrow B$, $C \Longleftrightarrow A$.

9. Investigar cómo se dice en latín la disyunción **o** y explicar porqué se usa el símbolo $\vee$ que parece una V.

10. La disyunción matematica ¿es de forma inclusiva o exclusiva? Si se dice: Comemos carne o bebemos leche, ¿qué se indica?

11. Si una empresa necesita del trabajo de un ingeniero o de un químico, ¿aceptará al Ing. Fulano? ¿al Químico mengano? ¿al Ingeniero químico zutano?

543. Valores de verdad. Dada una proposición cerrada existen *dos* posibilidades: que sea *verdadera* o que sea *falsa.* Estas dos posibilidades reciben el nobre de *Valores de Verdad.*

544. Tablas de Valores de Verdad. El valor de verdad de una proposición compuesta cerrada, depende del valor de verdad de cada una de las componentes.

CONJUNCION

Examínese la siguiente *tabla de verdad* de la conjunción:

P	Q	P $\wedge$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Nótese que tanto **P** como **Q** pueden ser V o F, que hay cuatro posibilidades al emplear la conjunción *y*, que para que la proposición compuesta sea *verdadera* se requiere que cada una de las componentes sea verdadera y que hay un 25% de probabilidad de que una conjunción sea verdadera.

DISYUNCION

La siguiente es la *tabla de verdad* de una proposición cerrada compuesta en que el conectivo es *o*: V

P	Q	P ∨ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Obsérvese que basta que *una* de las dos proposiciones sea *verdadera* para que la disyunción sea *verdadera.*

CONDICION SENCILLA o IMPLICACION: *Si... entonces:*

La tabla de verdad correspondiente a la *condición* es la siguiente:

R	S	R ⟹ S
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Obsérvese que las tres primeras conclusiones de la tabla anterior, no ofrecen dificultad ya que corresponden a la conclusión **S.** No así la cuarta.

Examínese el siguiente ejemplo:

R Las vacas vuelan: F

S Las serpientes son bípedas: F

Se acepta **R ⟹ S:** V en el sentido de que "Si las vacas volasen, las serpientes podrían ser bípedas". Dicho de otro modo es tan falsa **R** como **S.**

BICONDICION o DOBLE IMPLICACION

La proposición compuesta **R ⟺ S** es equivalente a **R ⟹ S ∧ S ⟹ R**

Por esta razón, la *tabla de verdad* de la doble implicación es como sigue:

R	S	R ⟹ S	S ⟹ R	R ⟹ S ∧ S ⟹ R
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

NEGACION

La *tabla de verdad* de una negación es como sigue:

T	∼T
V	F
F	V

Obsérvese que una proposición y su negación no pueden ser verdaderas ni falsas a la vez.

EJERCICIO 111

1. ¿Qué probabilidad tiene una conjunción de ser falsa?

2. ¿Qué probabilidad tiene una disyunción de ser verdadera? ¿Y una implicación? ¿Y una bicondición? ¿Y cada una de ellas, de ser falsa?

3. Elaborar las *tablas de verdad* de las siguientes proposiciones, formando el cuadro correspondiente:

a) (R ⟹ S) ∧ M

b) (M ⟹ S) ∨ M

c) (S ∨ T) ∧ (T ∨ S)

d) (N ⟹ n) ∨ N

e) M ∧ N ∨ P

f) M ∨ N ∧ P

g) R ∧ (S ∨ T)

h) ∼R ∨ (S ∧ T)

i) (R ∧ S) ∧ T

j) ∼R ∧ (S ∨ T)

545. Tautología.

En el lenguaje ordinario, *tautología* significa una repetición inútil, un pleonasmo. En lógica matemática se dice que hay una *tautología* cuando la indica solamente valores verdaderos.

La proposición $S \Longrightarrow S$ es una tautología, ya que:

S	S	$S \Longrightarrow S$
V	V	V
F	F	V

La siguiente proposición, $(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow (S \Longrightarrow R)$ también es una tautología, puesto que:

R	S	$R \Longrightarrow S$	S	R	$S \Longrightarrow R$	$(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow (S \Longrightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V	V

El siguiente cuadro, que es una tabla de verdad, indica que hay tautología $(M \wedge N) \Longrightarrow M$

M	N	$M \wedge N$	$(M \wedge N) \Longrightarrow M$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	F	F	V
F	V	F	V

La siguiente proposición: $(M \vee N) \vee N$ no es una tautología, ya que:

M	N	$(M \vee N)$	$(M \vee N) \vee N$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

546. La deducción o inferencia.

Algunas de las proposiciones que son tautologías sirven para conocer el valor de verdad de los raciocinios. Se estudiarán las siguientes:

MODUS PONENS: si en una *condición* se verifica la primera proposición, llamada antecedente, se ha de verificar también la segunda proposición, llamada consecuente.

Por ejemplo: Si encuentro un tesoro iré a Acapulco. Me encontré un tesoro... deduzco: iré a Acapulco.

Usando símbolos: R Encuentro un tesoro; S Iré a Acapulco:

$$[(R \Longrightarrow S) \wedge R] \Longrightarrow S$$

Lo anterior también se puede simbolizar así:

Sucede que $R \Longrightarrow S$
También sucede R
Se infiere S

MODUS TOLLENS: Si en una *condición* no se realiza el consecuente es porque no se realizó el antecedente; por consiguiente: si se sabe que el consecuente no se realizó, se deduce que el antecedente tampoco se realizó.

Por ejemplo: Si voy a la Capital, abriré un negocio. *No* abrí un negocio... luego: *no* fui a la Capital.

En símbolos: M Voy a la Capital; N Abriré un negocio.

Se realiza $M \Longrightarrow N$
No se realizó N
Se infiere que M no se realizó

Lo anterior se puede escribir también: $[(M \Longrightarrow N) \wedge \sim N] \Longrightarrow \sim M$

MODUS CONJUNTIVO: Se sabe que una *conjunción* es verdadera si sólo si ambas proposiciones componentes son verdaderas; si la conjunción es verdadera, se infiere que cualquiera de sus componentes, también es verdadera.

Ejemplo: Si se cumple que: Antonio come en casa y trabaja en su oficina; se puede inferir: **a)** Que Antonio come en casa y **b)** Que Antonio trabaja en su oficina.

Empleando símbolos: M Antonio come en casa; N (Antonio) trabaja en su oficina.

Se cumple que $M \wedge N$
Se infiere M
También se infiere N

En éste como en los MODUS anteriores se puede probar, mediante la tabla de verdad, que se tiene una *tautología.* La tabla es la siguiente:

M	N	M ∧ N	M ∧ N ⟹ N	M ∧ N ⟹ M
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

MODUS DISYUNTIVO: En una *disyunción,* por lo menos una de las proposiciones componentes ha de ser verdadera para que la disyunción sea verdadera. Si se sabe que una componente *no* es verdadera, la otra componente debe serlo.

Ejemplo. Si se sabe que: Vendrá Martha o vendrá Maritere, y se avisa que *no* vendrá Maritere, se deduce que vendrá Martha.

En símbolos se tiene: **A** Vendrá Martha; **B** Vendrá Maritere.

Debe de cumplirse **A ∨ B**
No se cumple **B**
Se deduce que **A** se cumple.

La tabla de verdad corresponde a la proposición:
[(A ∨ B) ∧ ∼B] ⟹ A:

A	B	A ∨ B	∼B	(A ∨ B) ∧ ∼B	[(A ∨ B) ∧ ∼B] ⟹ A
V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V

Nótese que se obtiene una tautología y por lo tanto el raciocinio es lógicamente válido.

SILOGISMO: Es una argumentación que consta de tres proposiciones: la mayor (la 1ª), la menor (la 2ª) y la conclusión (la 3ª). La conclusión se obtiene de la 1ª a través de la 2ª. En lógica matemática se dice que un silogismo consta de dos implicaciones en las que el consecuente de la 1ª es el antecedente de la 2ª, y la conclusión viene formada coh el antecedente de la 1ª y el consecuente de la 2ª.

Ejemplo:

Si es Fiesta Nacional, hay desfile militar,
si hay desfile militar, no hay futbol,
por lo tanto: si es Fiesta Nacional, no hay futbol.

Utilizando símbolos:

A Es Fiesta Nacional
B Hay desfile militar
C No hay futbol

Se tiene que **A ⟹ B**
y se tiene que **B ⟹ C**
se deduce que **A ⟹ C**

EJERCICIO 112

1. Elaborar la tabla de verdad correspondiente al MODUS TOLLENS.

2. Elaborar la tabla de verdad correspondiente al MODUS PONENS.

3. Elaborar las tablas de verdad de las siguientes proposiciones e indicar si se trata o no de una tautología:

a) **(A ∨ B) ∧ C** **b)** **(A ⟹ (B ∧ C)** **c)** **A ∧ (B ⟹ C)**
d) **(A ∧ B) ∨ (C ∧ D)** **e)** **(A ⟹ B) ∧ (C ⟹ D)**

4. Elaborar las tablas de verdad de los siguientes pares de proposiciones que corresponden a las leyes de DE MORGAN:

a) **∼(A ∧ B)** **b)** **∼A ∨ ∼B**
c) **∼(A ∨ B)** **d)** **∼A ∧ ∼B**

5. Comparar los resultados de **a)** y **b);** y de **c)** y **d).**

6. Indicar el raciocinio empleado en cada caso:

a) Si llueve, usaré paraguas. Está lloviendo, luego usaré paraguas.
b) Si trabajo estaré satisfecho. He trabajado, luego estoy satisfecho.
c) Iré a Honduras o a Nicaragua. No fui a Nicaragua, luego fui a Honduras.
d) Si tengo sed, bebo cerveza; si bebo cerveza, gastaré demasiado, luego si tengo sed gastaré demasiado.
e) Redacto libros y juego tenis. Luego, redacto libros.
f) Como pinole o chiflo. No como pinole, luego chiflo.

g) Si apruebo, iré a Europa; si voy a Europa visitaré Roma; luego: si apruebo, visitaré Roma.

h) Comes o ves la película; no comes, luego ves la película.

i) Si hace calor, se suda mucho; hace calor, luego, se suda mucho.

j) Las guerras son reprobables e inhumanas, luego son inhumanas.

7. Comprobar utilizando tablas de valor la distributividad de la *conjunción* sobre la *disyunción* y viceversa:

a) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

b) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

8. Investigar de dónde proceden las palabras: Modus, Tollens, Ponens.

9. Investigar en una Lógica el silogismo.

10. ¿A cuál de los silogismos tradicionales corresponde el estudiado aquí?

547. Cuantificadores. Hay *palabras* que indican la cantidad de los términos usados en las proposiciones. Estas palabras reciben el nombre de *cuantificadores.* Si decimos: *El tomate es una solanácea* no queda tan claro como si decimos: *Todos* los tomates son plantas solanáceas.

La expresión: *Algunos* prisioneros fueron indultados nos da idea más clara que decir: Los prisioneros fueron indultados.

A la palabra TODOS la llamaremos *cuantificador universal,* y a la palabra ALGUNO, la llamaremos *cuantificador existencial.*

548. Símbolos y negaciones de los Cuantificadores.

El símbolo del cuantificador universal es $\forall$

y el símbolo del cuantificador existencial es $\exists$

El primero indica la TOTALIDAD y el segundo, la EXISTENCIA DE ALGO.

Si negamos $\forall$ tendremos $\not\forall$ que indica que ALGO NO existe; en cambio si negamos $\exists$ tenemos $\not\exists$ que indica que NADA existe, de lo que se está tratando.

Ejemplos de cuantificación:

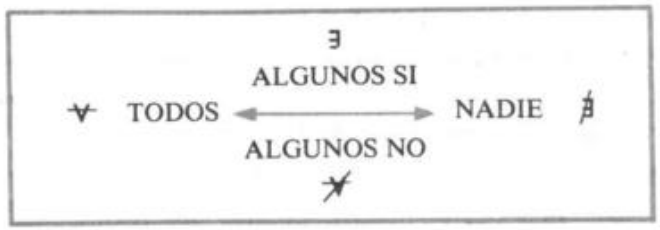
$\forall$ Todos los mexicanos son patriotas.

$\not\forall$ Algunos mexicanos *no* son patriotas.

$\exists$ Algún mexicano es patriota.

$\not\exists$ Ningún mexicano es patriota.

Gráficamente se podrían señalar los cuantificadores como sigue:



549. Cuantificadores numéricos. Hay expresiones que acompañadas de un *número* también cuantifican a los términos de las proposiciones: Por ejemplo:

a) Hay *a lo sumo* 12 atletas en la categoría A.

b) Hay *cuando menos* 12 atletas en la categoría A.

c) Hay *exactamente* 12 atletas en la categoría A.

Si *unimos* a) con b), obtenemos c).

1 CONJUNTOS

550. Noción de conjunto. En más de una circunstancia, se encuentra uno frente a conjuntos: una familia, un enjambre, un cardumen, las galaxias, un archipiélago, etc. Hay otras *agrupaciones* o *colecciones* que dan idea de un conjunto.

Con respecto a los números se tienen los siguientes conjuntos:

$\mathbb{N}$ conjunto de *enteros aritméticos* como 23, 25, 38, etc.

$\mathbb{Z}$ conjunto de *enteros algebraicos* como -10, -5, -4, -2, 0, 2, 4, (, 7, 89, etc.

$\mathbb{Q}$ conjunto de los números racionales como $-23/4$, $13/5$, $3/4$, $26/3$, etc.

$\mathbb{Q}$ conjunto de los números irracionales como $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{19}$, etc.

$\mathbb{R}$ conjunto de los números reales: que comprende los naturales

o enteros aritméticos, los algebraicos, los racionales, los irracionales.

Un conjunto está formado por los elementos que contiene.

551. Pertenencia. Para indicar que un elemento **a** pertenece a un ɔnjunto **E**, se escribe $\mathbf{a} \in \mathbf{E}$ que se lee: **a** pertenece a **E**, o bien: **a** es ɛmento de **E**.

En caso contrario, se escribe: $\mathbf{a} \in \mathbf{E}$: **a** no es elemento de **E**.

552. Cardinalidad. El número cardinal que corresponde al núero de los elementos de un conjunto se llama *cardinalidad*. La carnalidad de conjunto de números aritméticos nones menores de 10 es porque los elementos de ese conjunto son $\{1,3,5,7,9\}$.

Si un conjunto tiene una cardinalidad determinada es un conjunto ıito. Por ejemplo los habitantes de la República Mexicana.

Si la cardinalidad es ilimitada, el conjunto es *infinito*. Siempre es ısible contarle un elemento más. El conjunto $\mathbb{P}$ de los números *pares* infinito. Siempre se puede contar un número *par* más.

553. Igualdad de dos elementos y de dos conjuntos. Dos elɛntos son *iguales* si y sólo si representan el mismo ser. El "Manco Lepanto" y "Cervantes" representan al autor del Quijote: son igua-

Un conjunto es igual a otro si tiene los mismos elementos. Si el conɪto **A** tiene los mismos elementos que el conjunto **B**, se escribe:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Todo elemento de **A** pertenece a **B** y todo elemento de **B** pertenea **A**.

Esto se puede escribir:

$$\mathbf{x} \in \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{B}$$

e se lee: **x** pertenece a **A** si y sólo si **x** pertenece a **B**.

554. Determinación de un conjunto. Hay dos modos de poder ɛrminar los elementos de un conjunto:

1° *por extensión:* escribiendo una lista de todos los elementos (O su inicial) y encerrando dicha lista entre dos llaves. Así:

$$\mathbf{M} = \{\mathbf{a,c,f,g,h,j}\}$$

2° *por comprensión;* indicando la propiedad común que caracteriza a todos y cada uno de los elementos. Así:

$$\mathbf{I} = \{\mathbf{x}/\mathbf{x} \text{ es número impar}\}$$

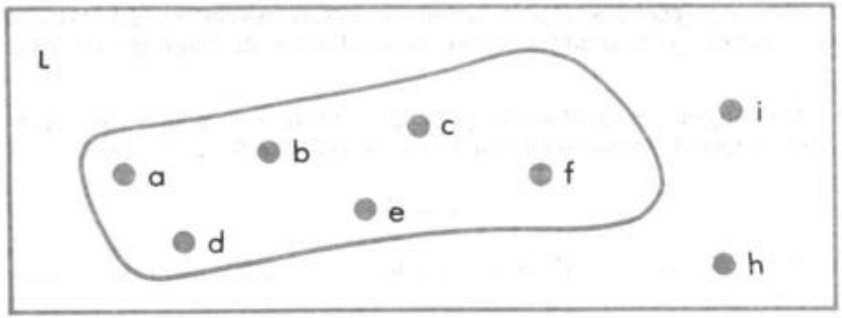
que se lee: **I** es el conjunto de **x**, tal es que **x** es un número impar.

Generalizando este segundo modo, y llamando $\mathscr{R}$ a la propiedad característica, se tiene:

$$\mathbf{M} = \{\mathbf{x}/\mathbf{x} \text{ verifica a } \mathscr{R}\}$$

En el conjunto **M** anterior, todas las **x** hacen *verdadera* la relación $\mathscr{R}$.

555. Diagrama de un conjunto. Los elementos de un conjunto se pueden representar como *puntos* de una parte de un plano, encerrados en una línea. La parte del plano encerrada por la línea es el conjunto. Los elementos son los puntos de dicha parte del plano. También pueden ser señalados con marcas dentro de la línea cerrada. Si un punto está fuera de la región encerrada, *no* pertenece al conjunto. Obsérvese el siguiente diagrama: (Llammado de Venn Euler).



Se puede escribir: $\mathbf{a} \in \mathbf{L}$; $\mathbf{b} \in \mathbf{L}$; $\mathbf{d} \in \mathbf{L}$, etc. y $\mathbf{h} \notin \mathbf{L}$; $\mathbf{i} \notin \mathbf{L}$.

556. Conjuntos particulares. Hay dos conjuntos especiales:

a) *El conjunto vacío:* el conjunto que carece de elementos es un conjunto *vacío*.

El conjunto formado por los números positivos menores de 9 y divisibles entre 12 no tiene elementos. Es un conjunto vacio. El conjunto vacío se simboliza así: $\varnothing$ letra danesa.

b) *El conjunto unitario:* es el conjunto formado por un solo elemento. Los satélites de la Tierra forman un conjunto unitario.

RELACIONES DE DOS CONJUNTOS

557. **Inclusión. Subconjuntos.** Si todo elemento del conjunto **A** pertenece también al conjunto **B**, se dice **A** está *incluido* en **B** y se escribe: $A \subset B$.

El conjunto $V = \{a,e,i,o,u\}$ está incluido en el conjunto:
$L = \{x/x \text{ es una letra}\}$
Se puede escribir: $V \subset L$.

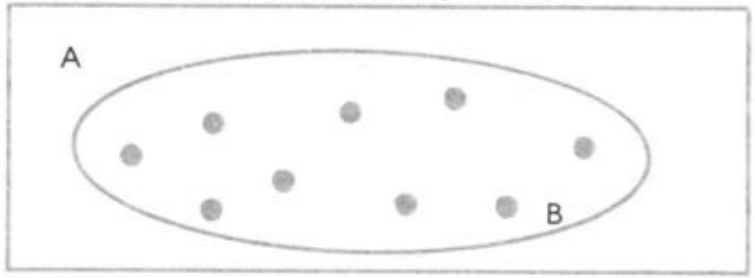
El conjunto incluido en otro conjunto se llama también subconjunto.

Obsérvese:

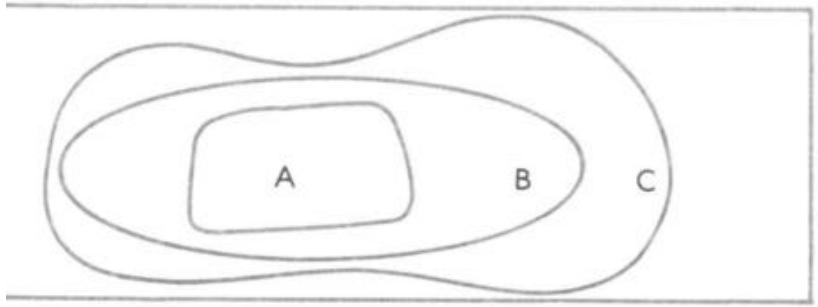
1° Todo conjunto **E** está incluido en sí mismo: $E \subset E$

2° El conjunto $\varnothing$ es subconjunto de todo conjunto **E**. $\varnothing \subset E$

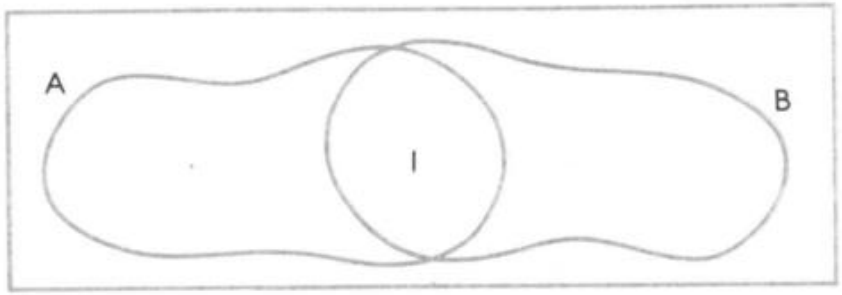
3° Si $A \subset B$ y $B \subset A$ se tiene que $A = B$.



4° Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.



558. **Intersección de dos conjuntos.** El conjunto **I** formado por los elementos comunes de dos conjuntos, forma la *intersección* de esos dos conjuntos. La expresión $I = A \cap B$ indica que los elementos de **I** pertenecen a **A** y pertenecen a **B**:

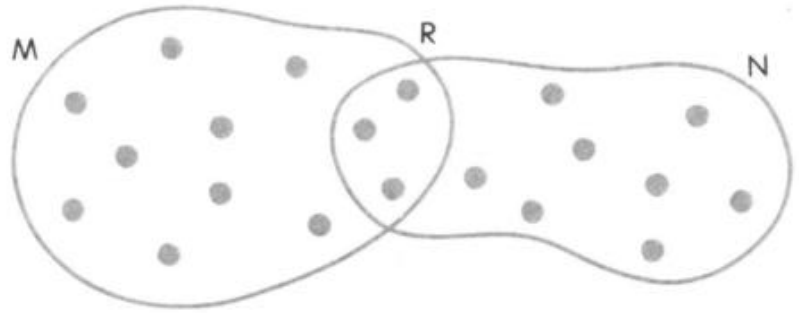


$$x \in I \Leftrightarrow x \in A \text{ y } x \in B$$

Cuando la intersección de dos conjuntos es el conjunto vacío $\varnothing$, se dice que esos dos conjuntos son *ajenos*.

559. **Reunión de dos conjuntos.** El conjunto **R** formado por los elementos que pertenecen *a lo menos* a uno de los conjuntos **A** y **B**, se llama reunión de los conjuntos **A** y **B**.

El diagrama siguiente representa la *reunión* de los conjuntos **M** y **N**. Se puede escribir: $M \cup N$:



EJERCICIO 113

1. Indique que el conjunto de los números aritméticos que son pares menores de 100 son un subconjunto de $\mathbb{N}$.

2. Exprese por extensión el conjunto de enteros algebraicos mayores que −3 y menores que 4. Llame al conjunto **E**.

3. Indique el conjunto **E** del número 2 es subconjunto de $\mathbb{R}$.

4. Escriba un conjunto igual al conjunto **M** = a,c,e,g

5. Defina por comprensión el conjunto de las consonantes del alfabeto.

6. Defina por comprensión el conjunto de los números algebraicos menores de 10.

7. Indique porqué el conjunto anterior es infinito.

Dados los siguientes conjuntos:

A = {1,2,3,4,5} ; **B** = {3,4,5,6,7}

C = {**x**/**x** es múltiplo de 2}

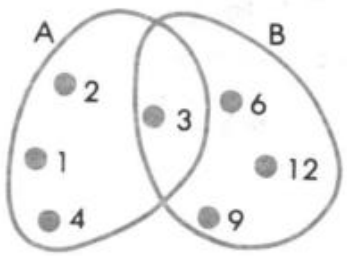
8. Halle **A** ∩ **B** ; **A** ∪ **B** ; **A** ∩ **C** ; **A** ∪ **C** ; **B** ∩ **C** ; **B** ∪ **C** ;

9. Trace los diagramas correspondientes a todos los conjuntos de los números anteriores.

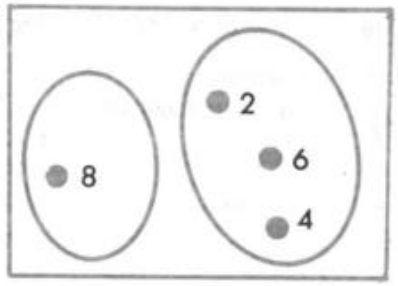
10. Dar ejemplos de conjuntos finitos y de conjuntos infinitos.

11. Interprete los diagramas siguientes:

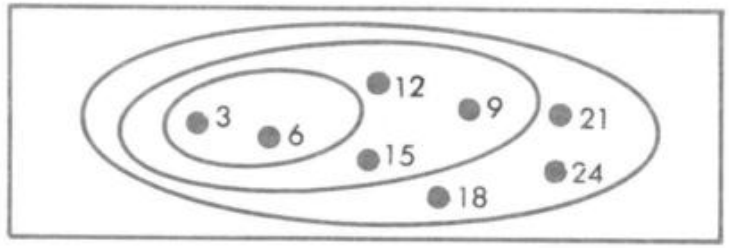
a)



c)



b)



Símbolos empleados en el Texto

SIMBOLO	LECTURA	EJEMPLOS
+	más	6 + 8 = 14 , a + **b**
−	menos	18 − 5 = 13 , c − d
×	por	7 × 9 = 63 , e × f
•	por	10 • 12 = 120 , g • h
—	entre	$\frac{12}{3} = 4$, $\frac{t}{s}$
÷	entre	323 ÷ 19 = 17 ; $u^4 \div u = u^3$
( )	paréntesis redondo	12 − (3 − 4) = 13 , (m + n) (m − n)
[ ]	paréntesis rectangular	16 − [8 − (3 + 5)] = 16 ; r + [s − (m + n)]
| |	valor absoluto	| −7 | = 7 , | −a | = | +a |
$\sqrt{\ }$	raíz	$\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[4]{a^8} = \pm a^2$
=	igual	8 = 6 + 2 ; m = n
≠	diferente	8 ≠ 6 ; t ≠ t^4
$f(x)$	función de equis	$f(x) = x^2 + x$; $f(x) = x^3 - 6x + 3$
log	logaritmo decimal	**log** 3 = .4771 ; **log** $\frac{r}{m}$
!	factorial	4 ! = 1 • 2 • 3 • 4 = 24 ; $\overline{n}$!
i	unidad imaginaria	$\sqrt{-1}$; $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\, i$
∧	y	8 ∧ 6 m ∧ n
∨	o	7 ∨ 9 x ∨ y
⟹	si... entonces	w ⟹ t
⟺	si y sólo si	a ⟺ b
∼	negación	∼a = no a
∀	todos	∀ a = todas las **a**
∀̸	algunos no	∀̸ b = algunas **b** no
∃	algún	∃ g = alguna g
∄	ninguna	∄ m = ninguna m
{ }	llaves	conjunto M = {b,c,d.....}
∅	conjunto vacío	
∩	intersección	A ∩ B = A intersección B
∪	unión	C ∪ D = C unión D